

CALCOLO
Misurare e calcolare tra continuo e discreto

Egidio Meazza

Che cos'è un calcolo? Letteralmente un sassolino. I Pitagorici usavano i sassolini (o tracce sulla sabbia) per rappresentare i numeri: è suggestivo pensare che sassolini, che potevano essere formati da silice, o le sabbie silicee siano gli antenati dei supercalcolatori, i cui componenti sono minuscoli cristalli di silicio. Il calcolo numerico consiste sempre, anche negli odierni calcolatori, in operazioni che hanno a loro fondamento il numerare: 1, ancora 1, ancora 1, ecc., eccolo di nuovo, uguale eppure diverso, come dice Sini. Allora il calcolare numericamente consisterebbe nel trasformare un insieme di cifre (sassolini) in un diverso insieme con precise regole. È così anche per la geometria? Sì e no. Sembrerebbe che nella geometria prevalga un'intuizione del continuo; dividendo un numero in parti sempre più piccole si arriva ad un punto in cui la divisione deve arrestarsi, mentre la divisione di una grandezza (geometrica) può continuare oltre ogni piccolezza immaginabile¹. Per Aristotele, caratteristica del continuo è di essere divisibile all'infinito². Allora nella geometria non ci sarebbe bisogno del numero, almeno finché non si tratti di introdurre misure. Ma consideriamo l'esempio di un semplice teorema della geometria di Euclide, quello che dice che la somma degli angoli interni di un triangolo è pari ad un angolo piatto. Nella dimostrazione non c'è alcuna necessità di misurare gli angoli, basta ricorrere al postulato delle parallele e considerare gli angoli formati da una parallela a un lato, condotta per un vertice, con gli altri lati. Se anche non c'è bisogno di alcun numero per esprimere l'ampiezza degli angoli, va detto che bisogna pur sapere che un triangolo è formato da "tre" angoli, che quando ho determinato l'ampiezza del primo (anche se non misurata numericamente), mi restano altri due angoli da considerare, ecc. Quanto poi al misurare per confronto o in base ai criteri di uguaglianza, siamo poi sicuri che ciò non celi un implicito ricorso al numero?

Se il continuo geometrico può forse essere frutto di un'intuizione originaria, il continuo aritmetico, al di là di ogni possibile intuizione, è stato *costruito* partendo dal discreto (importanti i lavori di Dedekind, Cauchy, Bolzano, Cantor, Weierstrass, ecc.): è così che si è ottenuto l'insieme dei numeri reali, insieme infinito più "numerioso" dell'insieme infinito dei numeri interi (o anche razionali e addirittura dei numeri irrazionali algebrici), che ne costituisce un sottoinsieme. I numeri reali sono i possibili valori delle grandezze in molti settori della scienza, dovunque queste siano considerate variabili continue: così avviene ad esempio nella fisica (classica, ma non solo). Ma anche se, nelle formule che costituiscono il contenuto teorico di queste scienze, le grandezze che compaiono sono considerate continue, quando si passa alla loro misurazione, prima e dopo l'eventuale esperimento, la continuità deve essere sacrificata: l'esatta misurazione di un dato sarebbe un processo infinito anche se si possedesse uno strumento di misura perfetto; bisogna perciò risolversi a utilizzare il discreto (ad esempio: 23,61 cioè 2 "sassolini" delle decine, 3 delle unità, 6 dei decimi, 1 dei centesimi lì fermandosi, oppure 2361 "sassolini piccoli", scelti come unità di misura).

Questa caratteristica delle misurazioni costituisce una spinta fortissima alla digitalizzazione, che prevale nell'elaborazione informatica, ma che è già adottata in molti strumenti di misura: a che pro avere un dispositivo che ci fornisce una misura per mezzo di un indice che può muoversi in modo (forse) continuo su un quadrante, se poi mi è impossibile con l'occhio discernere piccole differenze di posizione? Anche se con una vista perfetta, divina, riuscissi a osservare l'indice con la massima esattezza (e non ci fossero imprecisioni dello strumento), non potrei tradurre l'indicazione in numero reale perché, generalmente, mi occorrerebbero infinite cifre. L'inevitabile processo di discretizzazione, che sarei comunque costretto a compiere, è meglio affidarlo a uno strumento digitale, del quale conosco in anticipo il margine massimo di errore che può compiere, quasi sempre molto inferiore a quello che commetterei affidandomi alla mia vista. Ricapitolando si può dire che se anche la teoria tratta di grandezze continue la loro misurazione deve considerarle come discrete; certo, solo per quanto riguarda la misura: ciò non esclude che nei rapporti con altre grandezze, nell'ottenimento di nuove relazioni formali, esse debbano essere trattate come continue (ad esempio dove formule sono ricavate attraverso l'operazione di derivazione o di integrazione, proprie dell'analisi infinitesimale). Sembrerebbe esserci una notevole differenza, nell'ambito di una stessa scienza, tra l'aspetto teorico e quello sperimentale. Ciò

¹ Aristotele, *Fisica*, 207b.

² *Ivi*, 185b.

rende comprensibile il fatto che propriamente non si danno verifiche sperimentali di una teoria o, quantomeno, verifiche al di là di inevitabili errori di misura; ma l'esperimento, questo sì, può dare risultati che smentiscono la previsione teorica³.

Ma la matematica non è solo calcolo: così ammoniva il prof. Zalamea in occasione delle sue presenze a Mechri. La sua riflessione verte soprattutto – anche sulla scorta dei lavori di Grothendieck – sulla rete di relazioni fra diversi oggetti matematici e sulle operazioni, non esclusivamente di calcolo, che permettono di passare dall'uno all'altro. In un suo significativo intervento affermò che la logica matematica (con i suoi calcoli, che sono poi fondamentalmente gli stessi che trovano applicazione nei calcolatori elettronici) è seconda rispetto alla geometria, individuata come il dominio matematico in cui prevale il continuo. Che ruolo ha allora il continuo in un mondo in cui si è imposta la logica del calcolo informatico? Anche in ciò che non si riferisce esplicitamente al numero, come nell'elaborazione di testi e di suoni, nel disegno di figure, nel riconoscimento di immagini, e in tutte le straordinarie realizzazioni dell'AI si ha a che fare, come ricordava Sini, con applicazioni del calcolo nell'algebra di Boole, dove i vari componenti dei supercalcolatori possono assumere uno dei due stati fisici ammessi, generalmente indicati con 0 e 1.

Mi sembra di poter dire che il celebre matematico Paolo Zellini privilegi l'approccio discreto alla matematica: considera il continuo come una precognizione che, da secoli, ha guidato molto utilmente all'ampliamento dei concetti matematici, ma che troverebbe una concretizzazione solo nell'ambito del discreto. Così, ad esempio, l'introduzione dei numeri irrazionali – tipico quello del numero il cui quadrato è 2 – sarebbe guidata dall'esigenza di “riempire i buchi” nell'insieme numerico dei razionali, per realizzare il continuo; lo stesso si dovrebbe dire a proposito dei numeri trascendenti. A questo proposito afferma che «ogni calcolo che si proponga di approssimare l'aritmetica dei numeri reali segue un processo di riempimento che va dal discreto al continuo inconoscibile. Di solito noi siamo propensi a concepire il procedimento opposto (cioè una *divisione* del continuo), perché vorremmo, con un procedimento infinito in potenza, *riempire* lo spazio, e considerare i passaggi intermedi del riempimento come se ci fosse già chiaro in che cosa consiste quel *plenum* che è il punto ideale di arrivo del processo»⁴. Ma poco oltre, alla domanda se il continuo sia qualcosa di cui disfarsi, risponde che «sarebbe un grave errore pensarlo. Anche se inconoscibile, il continuo rimane un presupposto ineliminabile. Da un lato, come aveva capito Aristotele, non potremmo pensare a qualsiasi cosa senza il continuo (*Parva naturalia*, 450a), e dall'altro la sua definizione [...] (con le successioni fondamentali di Cantor o con le sezioni di Dedekind) ha comunque lo scopo di assegnare uno statuto ontologico, se pur ideale o fantomatico, alle soluzioni di svariati problemi approssimate nel discreto»⁵.

A questo riguardo cita anche Grothendieck, secondo il quale «gli sviluppi matematici più recenti avrebbero mostrato un'intima simbiosi tra strutture continue e discrete [...], tanto che sarebbe stato un programma di grandissimo interesse elaborare un modello [...], che fosse simultaneamente discreto e continuo, oppure di qualche carattere “misto”»⁶.

C'è un'altra importante questione che riguarda il calcolo informatico. Un calcolatore è una macchina *finita*: anche se dotata di un numero altissimo di componenti che possono assumere i due diversi valori indicati da 0 e 1, e quindi un numero di stati possibili elevatissimo, non può far altro che approssimare, solo approssimare, un processo di calcolo potenzialmente *infinito*, che deve certo essere troncato ad un certo punto, ma che può sempre essere portato un passo più in là di quanto può fare una macchina. Sempre Zellini, che pure esprime un grande apprezzamento per i processi algoritmici (discreti), evidenzia a questo proposito i limiti del calcolo delle macchine. Concetto chiave è quello di *densità*, cioè la possibilità di inserire sempre tra due numeri dati un nuovo numero intermedio⁷: «la densità è un presupposto per procedere a operazioni reiterate di approssimazione delle radici (irrazionali) di un'equazione. Appare tanto più singolare, allora, il fatto che il sistema di numeri di macchina, su cui si basa oggi tutto il calcolo automatico su grande scala, sia un sistema finito,

³ Credo che ciò non sia sempre sufficiente a inficiare una teoria, che ad esempio, potrebbe essere corretta, ma applicata a un sistema molto complesso, così che gli inevitabili errori di misurazione dei parametri iniziali, subirebbero effetti di moltiplicazione, portando a risultati molto diversi dalle previsioni. Ciò evidenzia limiti dell'applicazione dell'AI allo studio di sistemi complessi; dice ad esempio Benasayag: «Vi è una profonda debolezza della macchina, in quanto essa non tiene conto dei processi e dei fenomeni che stanno al di sotto della misurazione. [...] La discretizzazione del reale evita l'attrito ed espone le macchine a un'enorme sensibilità allo stato iniziale; in altre parole, un piccolo errore può provocare effetti catastrofici», M. Benasayag, *ChatGPT non pensa (e il cervello neppure)*, trad. dallo spagnolo di C. Serem, Jaca Book, 2024, p. 90.

⁴ P. Zellini, *Discreto e continuo. Storia di un errore*, Adelphi, Milano 2022, p. 327-328.

⁵ *Ibidem*.

⁶ *Ivi*, p. 331.

⁷ Densità non equivale a continuità, ogni insieme continuo è denso, ma non vale il viceversa; i numeri razionali ordinati secondo la loro grandezza costituiscono un insieme denso, ma non continuo.

discreto, di numeri finiti, in cui la proprietà di densità non è verificata: ogni numero di macchina ha un unico antecedente e un unico conseguente e tra due numeri di macchina consecutivi non ce n'è un terzo distinto dai primi due. Il sistema discreto di numeri necessari per approssimare la soluzione di un problema non ha nemmeno lontanamente la ricchezza del più piccolo campo di numeri (il campo razionale) chiuso rispetto alle operazioni di somma, prodotto e divisione»⁸. (Ciò si collega anche a quanto dice Benasayag: nota 3).

Il bellissimo germoglio, *L'omino di Riemann* di Paolo Imperatori, con il suo riferimento a Gauss, mi induce ad aggiungere alcune note in riferimento al teorema sul triangolo, cui ho fatto ricorso poco sopra. Gauss, impegnato nel lavoro di rilievo topografico nel regno di Hannover, misurò gli angoli del triangolo formato dalla vetta di tre monti, nel tentativo di confutare il teorema di Euclide: se la somma dei valori rilevati avesse dato un risultato sufficientemente diverso da 180° (Gauss si aspettava un valore inferiore), tenuto conto degli stimati errori strumentali, avrebbe contestato il postulato euclideo delle parallele e avrebbe mostrato che lo spazio non è piatto, ma dotato di una curvatura intrinseca⁹; ciò a meno di non ritenere che i raggi luminosi usati nell'esperimento si muovessero su una linea curva, salvando, per dir così, la geometria di Euclide e sacrificando l'ottica¹⁰. Questo mostra come l'esperimento, con le misurazioni che comporta, possa essere impiegato non per confermare una teoria, ma per inficiarla, e ci dice quanto Gauss fosse progredito negli studi sulla geometria non euclidea, grazie ai suoi lavori, che trovarono poi conferme e prosecuzione, in quelli di Bolyai, Riemann e Lobačevskij.

(30 gennaio 2026)

⁸ *Ivi*, p.58.

⁹ Il concetto di curvatura intrinseca di uno spazio, cioè senza riferimento ad uno spazio di dimensione maggiore in cui sarebbe immerso – e che perciò rimane invisibile – e la sua misurazione sono contenute nel *theorem egregium* di Gauss.

¹⁰ Vedi E. Agazzi, D. Palladino, *Le geometrie non euclidee*, Arnoldo Mondadori, Milano 1978, p. 309.