Linguaggi in transito: matematica. Germogli

ECHI DELSEMINARIO DEL PROFESSOR FERNANDO ZALAMEA (27 ottobre 2017)

Giuseppe Sparapano

Vorrei condividere con il professor Zalamea e gli amici di Mechrí un commento che mi è capitato di scrivere sul gruppo Facebook "Filosofia e Scienza", a proposito del ciclo Linguaggi in transito: matematica del 13-15 ottobre scorsi. L'amministratore del gruppo (Tommaso Tosi), sapendo della mia partecipazione al ciclo di incontri, mi ha direttamente coinvolto nella discussione e mi ha chiesto un'opinione.

Qui nel seguito riporto solo il mio commento, ma per chi fosse interessato a leggere la pubblicazione di Tommaso Tosi e la discussione che è scaturita con un altro membro del gruppo, ho allegato un foglio a parte con:
1) il link al sito web, cliccando sul quale si accede alla pubblicazione di Tommaso Tosi
2) la trascrizione della discussione avvenuta su Facebook tra il 23 e il 25 ottobre 2017.

Ecco dunque la trascrizione del mio commento:

> Grazie per il coinvolgimento. Ho cercato di leggere con attenzione quanto avete scritto e mi rendo conto che ci sono molte questioni interessanti e difficili. Credo di dover limitare (purtroppo) il mio commento all'ultima parte di quanto ha scritto Tommaso, quella delle "molte matematiche", perché come lui ha giustamente intuito è un tema che è emerso durante il seminario del prof. Zalamea. Purtroppo non è facile capire e riportare con chiarezza quanto espresso dal professore, ma spero di riuscirci almeno un po' e soprattutto di non dire qualcosa che per voi sia già noto.
>
> Zalamea ha detto con convinzione per me stupefacente che "esistono molte logiche". L'ha anche ripetuto più volte. All'inizio non capivo di cosa stesse parlando, poi però la cosa è diventata molto più chiara con lo schema in riferimento alle algebre di Heyting che allego nel seguito.
>
> Per mezzo di questo schema "semantico", il matematico introduce una sintassi logica. In questo schema, il principio del terzo escluso non vale più o non vale necessariamente. La logica binaria del P oppure non-P non è l'unica possibile. Infatti, per mezzo del movimento "coatto" lungo gli assi del rettangolo, si giungono a definire delle relazioni logiche in base alle quali è possibile stabilire dei principi di verità in relazione ai quali – per dire in fretta – se P è vero, non è detto che non-P sia falso. Questo è un esempio di logica intuizionista. Si potrebbe fare anche un esempio in riferimento alle logiche modali.
>
> Ora, la questione interessante e difficile comincia da qui. Zalamea ha parlato di "inversione del processo analitico cantoriano usuale". Non si passa dal numero all'intuizione sintetica del continuo, ma viceversa dall'intuizione sintetica del continuo al numero. Da quanto capisco, ed espresso in parole semplici, questo procedimento consiste nel partire da una struttura geometrica per tornare indietro al numero, mentre tipicamente noi siamo abituati a passare dal numero allo spazio (esempio cretino: quando ci accingiamo a prendere le misure di lunghezza/larghezza di una stanza). È chiaro che in questa inversione viene messa in questione e rivista proprio la nozione di numero, aprendola ad una chiave interpretativa di cui io personalmente non avevo mai sentito parlare. In proposito Zalamea ha parlato di "schema" proprio per indicare l'estensione del concetto di numero a quelle che sono le molteplici possibilità consentite dalle strutture della geometria non euclidea. La grande personalità che in matematica è riuscita a realizzare in concreto il passaggio dal continuo al numero e viceversa, superando e unificando così i problemi posti dallo sviluppo della geometria di Riemann e quelli posti dagli avanzamenti in algebra astratta di Galois, è il tedesco Grothendieck.
>
> L'ammirazione e la passione infinite con cui il professore ha raccontato le scoperte e le vicende della vita di Grothendieck mi hanno molto colpito e ho dedotto che l'importanza e la grandezza di questo matematico è almeno pari a quella di Einstein in fisica.

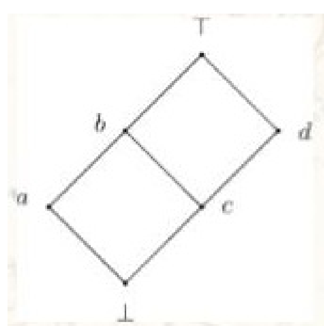
Detto questo, tornando all'idea delle "molte matematiche" o delle "infinite logiche", mi sembra di capire che questa idea sia meglio espressa dal procedimento di inversione a cui ho appena accennato. Per un matematico è proprio una questione tecnico-specialistica, anche se ciò che interessa di più sono le ricadute che questa idea ha e avrà in generale sulla cultura e sugli altri campi del sapere. Zalamea ha ampiamente insistito sul fatto che la matematica viene prima della logica e che la matematica è molto più ampia della logica. Se ripenso all'esempio del rettangolo in riferimento alla logica intuizionista capisco bene che cosa intende dire. Una diversa figura geometrica potrebbe dar luogo ad un'altra logica e così si potrebbero "inventare" tante logiche quante sono le figure che si possono disegnare: infinite. Ovviamente la cosa non finisce qui e non sta del tutto così. Ma il punto è che la teoria delle categorie di Grothendieck lascia intatta questa molteplicità consentendo, nel mentre, di passare da un ramo all'altro della matematica (dalla geometria alla logica e da questa all'algebra e viceversa). L'unificazione non sta tanto nell'unità formale della matematica, oppure nell'unità del procedimento matematico, quanto nella possibilità di passare mediante le categorie da un problema di algebra astratta ad uno di geometria senza perciò ritrovarsi in un vicolo cieco. Cosa che prima di Grothendieck, da ciò che ho capito, non era possibile. Non si aveva una teoria sufficientemente forte.

Zalamea ha anche molto insistito sul fatto che c'è uno scambio continuo tra la tecnica (la pratica) matematica e la profonda complessità delle strutture di pensiero che la sorreggono. "C'è un andare e venire" ha ripetuto più volte come un ritornello.

Queste novità in matematica hanno immediatamente posto a persone con sensibilità filosofica nuovi problemi. Sicuramente la filosofia della matematica non è più tanto interessata a scavare sotto nelle fondamenta per trovare i pochi assiomi su cui rifondare tutto l'edificio della matematica alla maniera di Russell. Tuttavia, se per metodo assiomatico intendiamo non questo, ma appunto il procedimento che vincola rigorosamente il procedere logico ("qualunque sia la logica") ad una precisa figura geometrica oppure allo "schema" secondo Grothendieck, allora concordo con Tommaso quando dice che la matematica non potrebbe smettere di usare il metodo assiomatico perché altrimenti non sarebbe più tale ma sarebbe altra cosa.

Un'ultima nota. Nikolaj ha fatto una finissima osservazione quando ha scritto che anche la nozione di gruppo è, in un modo ineliminabile, parte di quella realtà che si suppone esistere e che si vorrebbe matematicamente descrivere. Ma impostare così il discorso temo che non porti lontano, perché vedo sovrapporsi due ambiti del sapere che non possono dialogare a quel livello. Lo dimostra l'osservazione successiva sul metalinguaggio.

Il suggerimento che vorrei dare è che un possibile punto di congiunzione tra il problema del linguaggio e i problemi filosofici della matematica è dato dalla pratica logico-definitoria della scrittura. Infatti così come abbiamo una scrittura alfabetica, così abbiamo una scrittura matematica. Senza questa pratica, non sarebbe stato ragionevolmente possibile avere né la lingua né il calcolo, con tutti gli effetti a cui queste due "invenzioni" hanno potuto dar luogo.



ALLEGATO

Intervento di Tommaso Tosi:

https://it.quora.com/Questa-%C3%A8-una-domanda-che-faccio-da-sempre-quando-ho-a-che-fare-con-matematici-e-mi-incuriosiscono-le-loro-risposte-quasi-sempre-contrastanti-La-matematica-la-scopriamo-o-la-inventiamo/answer/Tommaso-Tosi

Discussione su Facebook:

Nikolaj Ivanovic Lobacevskij Dal tuo intervento si desume che la matematica si caratterizza come "invenzione cogente perche' basata sull'inferenza". Personalmente, sono vicino a questa idea; tuttavia sento che molti matematici (me compreso) interpreterebbero la domanda iniziale rivolgendo all'indietro, e non in avanti, la richiesta. Piu' precisamente, credo che un matematico interpreterebbe la domanda legandola alla questione (ugualmente spinosa) della "irragionevole efficacia": esiste una definizione, possiamo prendere ad esempio quella di gruppo, ed esiste una sorta di giustificazione sommaria dell'interesse per tali oggetti: si tratta di una matematizzazione della nozione di reversibilita'. Tale nozione e' ubiquitaria, e da qui nasce una domanda a cui la matematica non sa -costitutivamente, e per scarso interesse- rispondere: non esiste una giustificazione dell'_esistenza_ di questi oggetti. Perche' ci sono? Perche' e' possibile parlarne? Quando descriviamo le trasformazioni dello spazio-tempo mediante un gruppo (sia esso di Galileo o di Lorentz-Poincare') cosa stiamo facendo, precisamente? Stiamo parlando di qualcosa che esiste, ma per cui ci mancava il lessico (e dunque, stiamo _scoprendo_ la matematica) oppure stiamo imponendo alla realta' una sua copia quanto piu' possibile aderente, ma distinta (e dunque "non esiste" nella "realta`" qualcosa di assimilabile alla nozione di gruppo astratto, e dunque stiamo _inventando_ le strutture e le parole atte a descrivere il cosmo)?

Ci sono diversi problemi formali in una domanda come questa: ad esempio, alcuni termini (esistere, realta', e altri) sono definiti in modo troppo approssimativo; sposando la seconda posizione in maniera troppo brutale, si dimentica che anche la definizione di gruppo e', in un senso ineliminabile, parte della realta'. Sposando la prima, si arriva all'assurdo che afferma una "esistenza concreta" per il gruppo libero su due elementi (che, in particolare, deve essere un insieme infinito) oppure, molto peggio, di insiemi di cardinalita' arbitraria.

A proposito del fatto che gli assiomi di una teoria matematica sono arbitrari, e le derivazioni ottenibili da essi sono univocamente determinate dalla loro scelta: sebbene sia abbastanza chiaro che cosa intendi, non e' esattamente vero: dipende da quale logica stai adottando: questa scelta e' arbitraria nel metalinguaggio -e cosa c'e' sopra il metalinguaggio? In questo meta-meta-linguaggio la scelta di quale metalinguaggio usare per definire il linguaggio sara' arbitraria... e cosi' via. Il problema quindi e' abbastanza sottile (oserei dire, uno dei piu sottili della teoria del linguaggio).

Penso pero' esista una ragione abbastanza pratica per cui questo problema e' poco conosciuto e preso in considerazione dai matematici; non si tratta di una scelta filosofica quanto piuttosto di una caratteristica essenziale alla pratica matematica. Solitamente un matematico manipola schemi di assiomi -e ancor piu' precisamente, la rete di dipendenze e relazioni che intercorre all'interno dei predicati esprimibili in una data rete di assiomi-. In ambo i casi, fosse la matematica una parte del mondo fisico (seppur in qualche modo segreto e incomprensibile) o inventata (sulla base di una ispirazione di non meglio precisata forma che "catalizza" le ricorrenze percettive raccolte a proposito dei sistemi reversibili) la pratica matematica, intesa a vari livelli come tecniche dimostrative, ispirazione da problemi concreti, istinto a modellizzare e descrivere fenomeni sparsi in maniera unitaria, e strategie di dimostrazione cambierebbe poco, direi quasi per nulla.

C'e' poi un ulteriore punto che sarebbe molto bello espandere, ma prenderebbe ore ed ore, ossia il fatto che parlare della matematica come un ente singolo e' riduttivo e sbagliato. Ci sono, piuttosto, _diverse_ matematiche, perche' sono diversi i linguaggi in cui essa viene sviluppata, perche' il tasso di produzione super-esponenziale di nuova matematica ha allontanato branche della disciplina prima contigue, e ora vittime dell'iperspecializzazione, e per mille altri motivi.

Tommaso Tosi Sul problema dell'"irragionevole efficacia" non mi sono soffermato perché per l'appunto non lo reputo affatto un problema (cioè una questione la cui problematicità rimane a prescindere da come la si intende), ma diventa un problema se contestualizzato in un insieme di assunti filosofici/metafisici di base, consapevolmente o meno: ovvero quelli del realismo oggettivistico alla Galileo, per il quale si assume che ci sia un pensiero "qui dentro" ed una realtà "là fuori" sulla quale il pensiero, tramite la matematica, inspiegabilmente fa presa (e in quel contesto avrebbe anche senso: sarebbe strano che con due strutture di enti completamente separati si riuscisse a comprendere ed adeguare la forma dei secondi a quella dei primi):

Ora, mostrando che questa posizione è ingenua (quello che la filosofia, nella sua forma rigorosa, punterebbe a fare è essere una specie di "matematica della costituzione logica del mondo" che questioni tutti i suoi presupposti), visto che non è possibile dimostrare l'esistenza di una tale realtà se non facendo riferimento al pensiero tramite cui la stessa realtà è concepita (e dunque sarebbe sempre quantomeno "filtrata" tramite esso), senza per questo affermare che non esiste una realtà esterna al pensiero, ci si trova con due classi di oggetti fondamentali: quelli ideali (cioè "astratti", tra cui quelli matematici), diciamo trascendentali, e quelli empirici (cioè "fisici", materiali, ma che sono sempre tali *nella considerazione* che il pensiero ne fa, cioè più semplicemente sono concepiti, categorizzati e percepiti dal pensiero e dalle sue strutture conoscitive, non si ha mai l'oggetto materiale "in sé", che esista ed abbia senso parlarne o meno).

Come si è visto, e come anche il problema del realismo nell'interpretazione della meccanica quantistica mostra, non c'è modo di sapere se ciò che si va a misurare "esista di per sé", ed un'eventuale risposta per definizione rientrerebbe comunque nelle "facoltà conoscitive" del pensiero.

Dunque la ragione per la quale considero scorretto impostare il problema della matematica come invenzione o come scoperta facendo riferimento alla supposta "irragionevole efficacia" è perché gli oggetti fisici non dispongono di alcuna necessità intrinseca in termini logici: "scoperta" vuol dire conoscenza adeguata ad una struttura preesistente e fondata in sé, dunque (almeno) la prima forma di necessità è quella logica (e da qui la domanda relativa all'arbitrarietà o all'univoca necessità della posizione degli assiomi), mentre logicamente un oggetto fisico non fonda se stesso (giacché l'esistenza di una qualsiasi cosa a livello filosofico va dimostrata - mentre le scienze positive possono tralasciare il problema descrivendo relazioni tra grandezze dei fenomeni che rimarrebbero tali anche se essi fossero illusioni o sogni - si deve dimostrare che gli oggetti fisici e i fatti esistono come tali, e la dimostrazione non può essere condotta con oggetti fisici ma con concetti).

Quanto alla dicotomia tra "oggetti ideali" (trascendentali) e "oggetti fisici" (empirici), la posizione conseguente al discorso appena fatto (che poi riprende cose dette già da Kant a fine '700 e poi da Husserl meno di un secolo fa) è per l'appunto "intermedia" e integra l'esistenza di entrambi ricomprendendola, perché entrambi esistono nei limiti e nei modi dati dalle loro proprietà: i primi esistono come idee, i secondi come oggetti materiali, ma solo attraverso i primi è possibile dire rigorosamente qualcosa sui secondi.

Riguardo al discorso dell'arbitrarietà degli assiomi, per l'appunto la domanda su "quale logica (formale) usare" che sposta l'arbitrarietà a livello metalinguistico è legittima sul piano matematico (che segue il metodo ipotetico-deduttivo assiomatico), ma lascia in sospeso la domanda principale della filosofia teoretica (cioè della conoscenza tutta): quale sistema di logica permette di concepire i diversi sistemi formali, dal quale essi derivano come casi particolari di applicazioni di principi in un ordine o in un altro, e che in qualche modo li fonda e li comprende nella loro struttura? Il fatto che un tale sistema debba esistere è dato dal fatto che determinati principi logici sono innegabili (cioè: anche volendo provare a negarli, l'operazione fallisce perché per essere esercitata abbisogna di quegli stessi principi), come il principio di identità (nel suo senso più generale), cioè non si ha nessuna "scelta" riguardo il loro utilizzo, e trascendono il loro uso performativo a livello puramente formale (matematico).

E visto che alla risposta bisogna arrivare in modo "dimostrativo", cioè ci si deve assicurare che essa sia necessariamente vera e non ancora una "scelta" (altrimenti non sarebbe risposta ma una

riproposizione del problema), non sarà possibile usare il metodo assiomatico, ma qualcosa di essenzialmente diverso che riesca a mostrare la necessità del proprio procedimento (sottraendosi all'arbitrarietà delle scelte logiche nei metalinguaggi in un regresso all'infinito).
Su questo ha lavorato l'intera tradizionale filosofica occidentale, dalla dialettica di Platone fino a quella di Hegel (che spesso viene snobbata per l'oscurità del linguaggio usato, ma se studiata in profondità è estremamente rilevante per il tema) e alla logica pura di Husserl, che peccano tuttavia del fatto di essere ancora troppo imprecise e vaghe nella terminologia e non sono formalizzate.
Sul fatto che comunque, almeno a livello operativo e pratico, la risposta a queste domande non sia molto influente nel fare matematica sono d'accordo.

A proposito delle "molte matematiche", ho inteso "matematica" con "ogni sistema formale sviluppato secondo il metodo assiomatico (o che può comunque essere assiomatizzato)", cioè la matematica come scienza formale in sé, non come le sue varie espressioni che comunque seguono tutte lo stesso metodo - anche relativamente a procedimenti pratici di matematica meno vicini al modo di procedere occidentale (sulla matematica asiatica sarebbe interessante avere qualche riferimento), anche se non procedono contingentemente tramite leggi, assiomi e teoremi, è comunque possibile generalmente (e direi doveroso, in termini di assiomatizzazione e formalizzazione rigorosa) riesprimerli in questi termini.

Ritengo che avrebbe senso parlare di matematiche al plurale nel vero senso del termine solo se una qualche matematica smettesse di usare il metodo assiomatico - ma a quel punto perché volerla chiamare ancora matematica?

Tommaso Tosi Sul tema sarebbe interessante anche sentire che ne pensa Giuseppe Sparapano, che recentemente è stato ad un seminario del prof. Zalamea intitolato: "Tecniche e idee della matematica contemporanea per lo sviluppo attuale della filosofia".