LINGUAGGI IN TRANSITO: MATEMATICA. GERMOGLI

DOMANDE AL PROFESSOR ZALAMEA

EGIDIO MEAZZA

15 NOVEMBRE 2017

RISPOSTE DI ZALAMEA

(mi scuso degli inevitabili errori nell'italiano)

1 Dicembre 2017

1. Lei ha detto che tra la logica dei topoi e quella classica c'è un continuo di logiche. Non mi stupisce che tra i due estremi ci siano infinite logiche, ma se esse sono formali non devono necessariamente essere numerabili e non avere la potenza del continuo?

Sì sono formali, ma vengono caratterizzate dalle sue *semantiche*: prenda, per ogni sotto-insieme X dei naturali, l'algebra di Heyting H_X data dall'ordine lineale su X, e consideri le logiche $Th(H_X)$. Vi dà un continuo di logiche tra la logica intuizionista e la logica classica (costruzione di Gödel).

Questa è una situazione strana infatti: anche se i *linguaggi* sono numerabili, possiamo pensare a un continuo non numerabile. È come il mondo cosmologico: anche se tutte le teorie fondamentali ci dicono che l'universo è finito, possiamo certamente pensare ad una infinitudine potenziale, non realizzabile negli atomi concreti.

In alternativa: come si può formalizzare un continuo di logiche? Questa è un'operazione costruttiva, accettabile dalla logica intuizionista?

Mi sembra di non essere una operazione costruttiva, ma non sono sicuro.

2. La logica intuizionista introduce delle limitazioni rispetto alla logica classica; perché allora è adatta allo studio di diversi spazi topologici, mentre la classica non lo è?

Gli spazi topologici formano una semantica adeguata e completa per la logica intuizionista (risultato di Tarski), mentre non è così per la logica classica (le algebre di Boole formano quella semantica adeguata e completa). Da un altro canto, la logica classica sì permette un buon studio degli spazi topologici, ma attraverso *punti*. Se vuole farlo davvero con *vicinanze*, le topologie di Grothendieck sono più naturali, e dietro queste emerge la logica intuizionista (risultato di Lawvere: la logica dei topoi elementari è intuizionista, non classica).

Non dovrebbe, a maggior ragione, essere possibile ottenere gli stessi risultati con la logica classica, eventualmente non usando la legge del "terzo escluso" o dei teoremi che derivano dal suo impiego? Cioè: esiste qualche cosa che si può dimostrare con la logica intuizionista e non con quella classica?

Dal punto di vista della *dimostrazione*, la risposta è no: per definizione la logica classica è più forte che quella intuizionista. Ma dal punto di vista dei *concetti*, la risposta è sì: dei concetti che nella logica classica sono equivalenti, non lo sono più nella intuizionista (per esempio, diverse costruzioni dei numeri reali). Detto in un altro modo: quello che la logica classica non discerne (perchè prova equivalenze), la logica intuizionista può farlo meglio (perché, essendo più debole, le equivalenze non valgono più).

E questo dipende forse dalla sostituzione del concetto di verità con quello di dimostrabilità?

In un certo senso sì: per gli intuizionisti la *costrutibilità* è l'unica forma di verità.

[PD: A Egidio Meazza: grazie per il profondo commento su *La nuova matematica e la scrittura*, e anche per il bel spunto Torri-Borges-Zalamea]