



MECHRÌ - LABORATORIO DI FILOSOFIA E CULTURA

MILANO
13-15 Ottobre 2017

**TECNICHE DELLA MATEMATICA CONTEMPORANEA
PER LO SVILUPPO ATTUALE DELLA FILOSOFIA**

Fernando Zalamea
Departamento de Matemáticas
Universidad Nacional de Colombia

PROGRAMMA

1 CATEGORIE	2 FASCI E TOPOI	3 LOGICHE NON CLASSICHE
1.1. Tecniche matematiche 1.1.1. Relazionalità sintetica 1.1.2. Concrezione e astrazione 1.1.3. Funtorialità e naturalità 1.1.4. Lemma di Yoneda 1.1.5. Teoremi di Freyd	2.1. Tecniche matematiche 2.1.1. Topologia insiemistica 2.1.2. Continuazione analitica e fasci 2.1.3. Topologie di Grothendieck 2.1.4. Fasci sopra un sito 2.1.5. Topoi di Grothendieck	3.1. Tecniche matematiche 3.1.1. Logica intuizionista 3.1.2. Logiche modali 3.1.3. Modelli di Kripke 3.1.4. Topoi elementari 3.1.5. Logica dei topoi
1.2. Pensatori della matematica 1.2.1. Mac Lane 1.2.2. Freyd	2.2. Pensatori della matematica 2.2.1. Serre 2.2.2. Grothendieck (1, 2)	3.2. Pensatori della matematica 3.2.1. Kripke 3.2.2. Lawvere
1.3. Problemi filosofici 1.3.1. L'universo (Florenskij) 1.3.2. Analisi e sintesi 1.3.3. Linguaggio e immagine (Warburg) 1.3.4. Logica universale (= logiche) 1.3.5. Pragmatica universale (Peirce)	2.3. Problemi filosofici 2.3.1. Lo spazio (Riemann - Grothendieck) 2.3.2. Molteplicità e unità 2.3.3. Transiti e ostruzioni 2.3.4. Ontologia transitoria (Badiou) 2.3.5. Epistemologia dinamica (Châtelet)	3.3. Problemi filosofici 3.3.1. Il tempo 3.3.2. Linearità e ramificazione 3.3.3. Statica e dinamica (Benjamin) 3.3.4. Storia e contaminazione (Cavaillès) 3.3.5. Fenomenologia della frontiera (Peirce)
1.4. Sintesi 1.4.1. Le categorie della FIL-MAT 1.4.2. Prima Triade -/+	2.4. Sintesi 2.4.1. I fasci della FIL-MAT 2.4.2. Seconda Triade -/+	3.4. Sintesi 3.4.1. Le negazioni della FIL-MAT 3.4.2. Terza Triade -/+

Venerdì Ottobre 13

1

CATEGORIE

1.1. Tecniche matematiche

- 1.1.1. Relazionalità sintetica
- 1.1.2. Concrezione e astrazione
- 1.1.3. Funtorialità e naturalità
- 1.1.4. Lemma di Yoneda
- 1.1.5. Teoremi di Freyd

1.2. Pensatori della matematica

- 1.2.1. Mac Lane
- 1.2.2. Freyd

1.3. Problemi filosofici

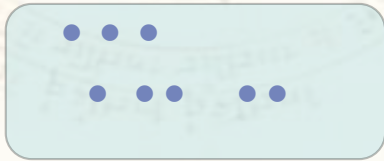
- 1.3.1. L'universo (Pavel Florenskij)
- 1.3.2. Analisi e sintesi
- 1.3.3. Linguaggio e immagin(azion)e (Aby Warburg)
- 1.3.4. Logica universale (= logiche)
- 1.3.5. Pragmatica universale (Charles S. Peirce)

1.4. Sintesi

- 1.4.1. Le categorie della filosofia matematica
- 1.4.2. Prima Triade -/+

1.1.1. Relazionalità sintetica

dialettica - polarità - dualità



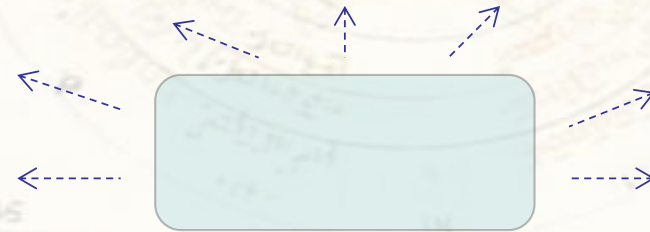
conoscenza interna di un oggetto ("cristallo")

accumulazione informazione atomica

*de-composizione in **elementi***

ANALISI

Teoria degli Insiemi



conoscenza esterna di un oggetto ("scatola nera")

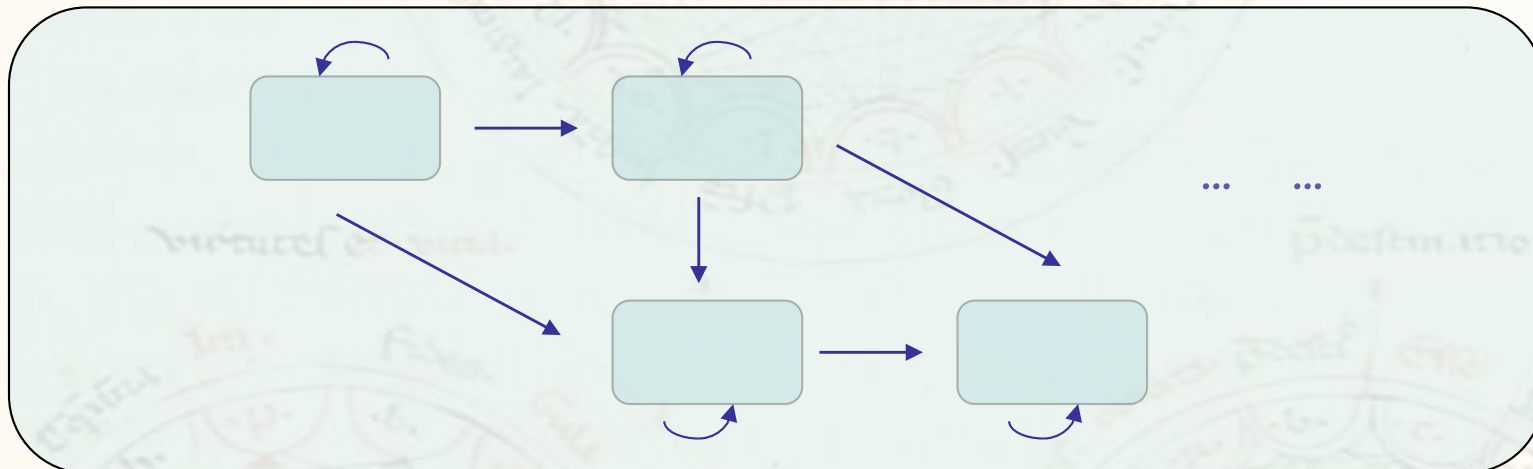
azione-reazione con l'ambiente

*re-composizione via **morfismi***

SINTESI

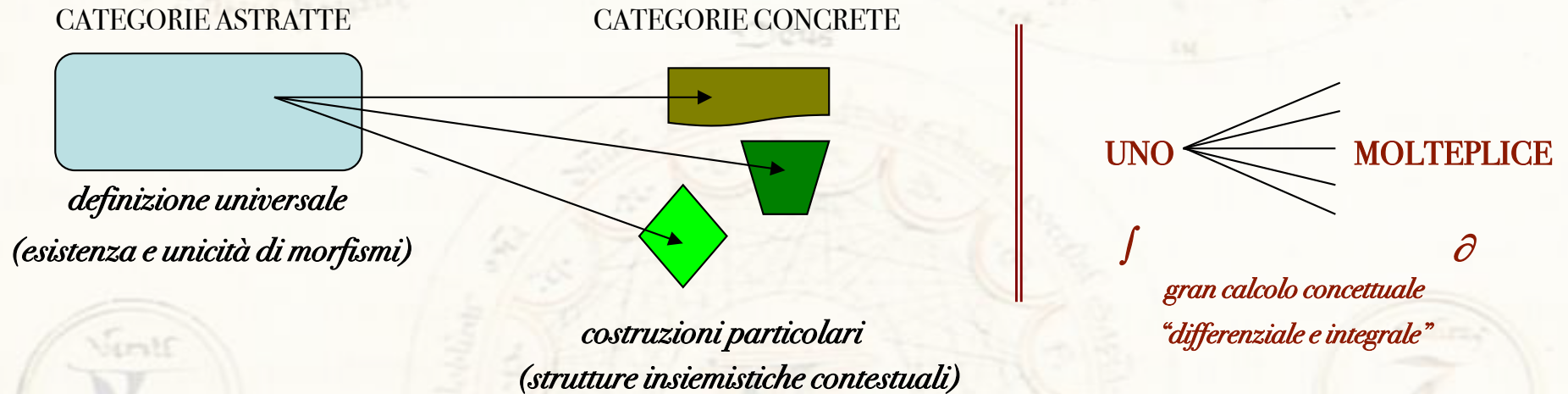
Teoria delle Categorie

categoria (astratta): collezione di morfismi con composizione "minimale" (associatività, identità)



1.1.2. Concrezione e astrazione

concetti universali (in categorie astratte)
verso costruzioni particolari (in categorie concrete)



Esempi: *oggetto iniziale*

$$0 \longrightarrow A$$

$\exists!$

morfismo epi

$$A \xrightarrow{f} B \xrightleftharpoons[h]{g} C$$

$$gf = hf \Rightarrow g = h$$

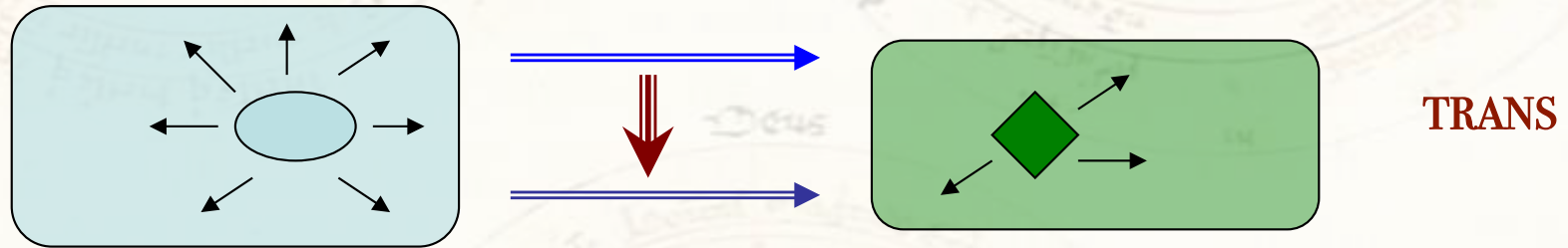
etc.etc.

INS	:	$\emptyset$
GRP	:	$\{e\}$
ANL	:	$\mathbb{Z}$
C_P	:	$\min(P)$, se P possiede minimo
INS_{INF}	:	non esiste

INS	:	suriettiva (inversa a destra “ <i>split epi</i> ” via assioma di scelta)
GRP	:	immagine normale (dunque suriettiva)
ANL	:	più debole di suriettiva
HAU	:	immagine densa

1.1.3. Funtorialità e naturalità

gerarchia di transiti: morfismi, funtori, trasformazioni naturali



(1) morfismi

(2) funtori: transiti in oggetti e morfismi

(3) trasformazioni naturali: transiti in funtori

che “preservano il preservabile” (composizione, identità)

che “preservano il preservabile” (commutazione di quadrati)

relazionalità sintetica a livello funtoriale:

oggetto in una categoria $\mathbf{C}$: determinato dai morfismi che escono da lui (“irradiazione”)

A

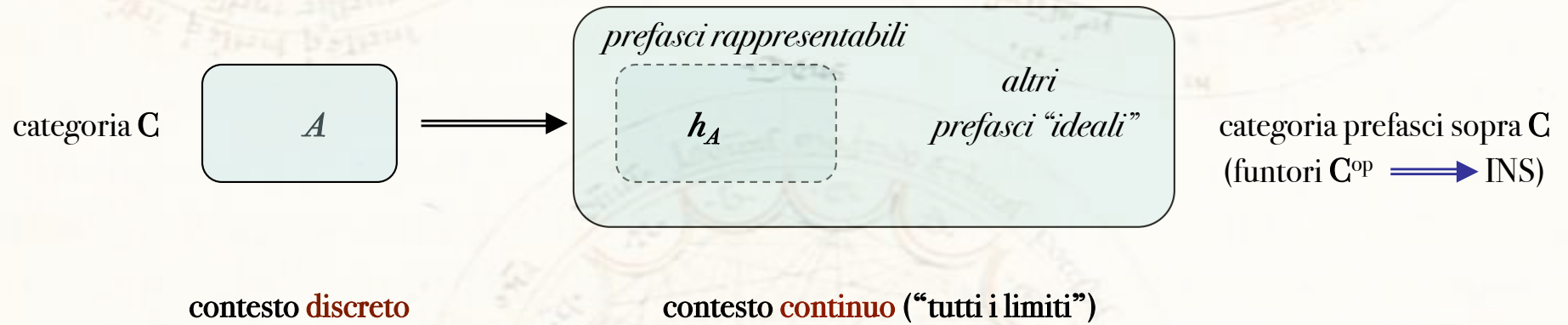
$Mor_{\mathbf{C}}(A, —)$

dà luogo a un funtore (“prefascio rappresentabile”)

$h_A : \mathbf{C}^{op} \longrightarrow \mathbf{INS}$

1.1.4. Lemma di Yoneda

Tutta categoria (piccola) si sommerge in una categoria (completa) di prefasci:



Per tanto, in tutto contesto di rappresentazione si conta con una *presenza nascosta del continuo*.

Al fare emergere la relazionalità sintetica (h_A in luogo di A) sorge uno *spazio naturale di completazioni ideali*.

La sintesi permette osservare *aspetti invisibili per certe letture analitiche*.

1.1.5. Teoremi di rappresentazione di Freyd

allegorie e categorie intermedie

allegorie: assiomatizzazione di categorie di **relazioni** (Freyd, 1990)

teorie pure di tipi

- regolarità
- coerenza
- primo ordine
- ordine superiore

categorie libere

- **regolari**
- **pre-logoi**
- **logoi**
- **topoi**

esempio

C_p

- ordine
- reticolo distrib. con 1
- algebra di Heyting
- $P = \{\bullet\}$

archetipi del pensiero matematico

teoria

T

relazionalità

allegoria

A_T

categoria

$MapSplitCor(A_T)$

sussunzione nell'identità (*Cor*)

invertibilità parziale (*Split*)

funzionalità (*Map*)

1.2.1. Saunders Mac Lane

quando
1909-2005



1934: Tesi (logica; Göttingen)

1934-47: Harvard

estensioni di gruppi, homologia,
spazi di Eilenberg-MacLane

Survey of Modern Algebra (1941, con Birkhoff)

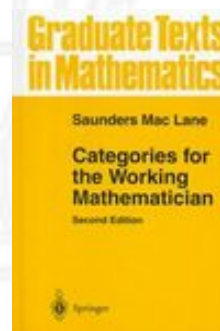
1943-45: emergenza teoria delle categorie

1947-: Chicago

Homology (1963)

Categories for the Working Mathematician (1972)

Mathematics. Form and Function (1986)



dove
USA

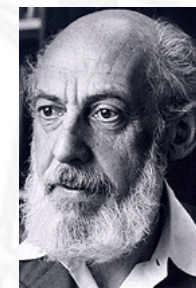
inventore teoria delle categorie (con SE)

grande espositore

notevole direttore di tesi

Samuel Eilenberg
(Polonia, 1913-1998)

top. algebrica, homologia,
teoria delle categorie



1.2.2. Peter Freyd

quando
1936-



dove
USA

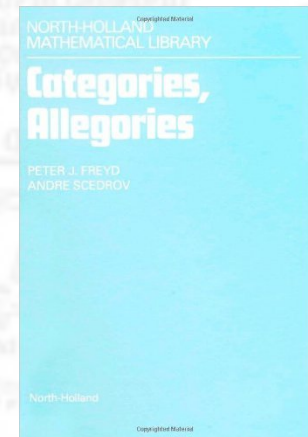
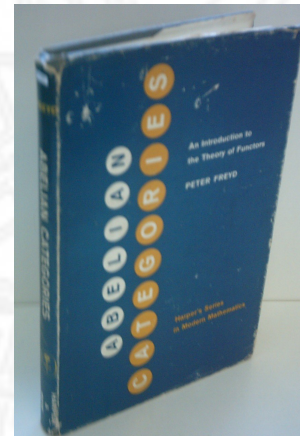
1960: Tesi (categorie; Princeton)
teorema del funtore aggiunto
teoremi di rappresentazione

1990: invenzione allegorie

University of Pennsylvania

Abelian Categories (1964)

Categories, Allegories (con Scedrov, 1999)



visionario teoria delle categorie (con Lawvere)

1.3.1. L'universo (Pavel Florenskij)

universale = **un**um **versus** **al**tri
*problematica essenziale (Florenskij):
collegamento del molteplice e dell'uno*

lungo i secoli, Universale legato a Assoluto,
ma, da Peirce i poi (logica dei relativi)
e attraverso gli sviluppi matematici 1900-2000,
emergenza di una nozione di **UNIVERSALE RELATIVO**
(vedere discussione 2.3.2 – 2.3.5)

apparente contraddizione in termini,
di grande valore nel programma di una semiotica e una pragmatica universali
(vedere discussione 1.3.4 – 1.3.5)

1.3.2. Analisi e sintesi

Secolo XX

Teoria degli Insiemi / Logica Classica Primo Ordine

FILOSOFIA ANALITICA

Secolo XXI

Teoria delle Categorie / Logica dei Fasci

FILOSOFIA SINTETICA

IN

prefisso basilico

TRANS

decomposizione / delimitazione
ricoprimento

concetto matematico

composizione / estralimitazione
rappresentazione

positività

bordo logico

negatività

(non commutatività, non linearità, non elementarietà...)

stratificazione / purificazione

pragmatica

deformazione / quantizzazione

albero di Hilbert

orizzonte

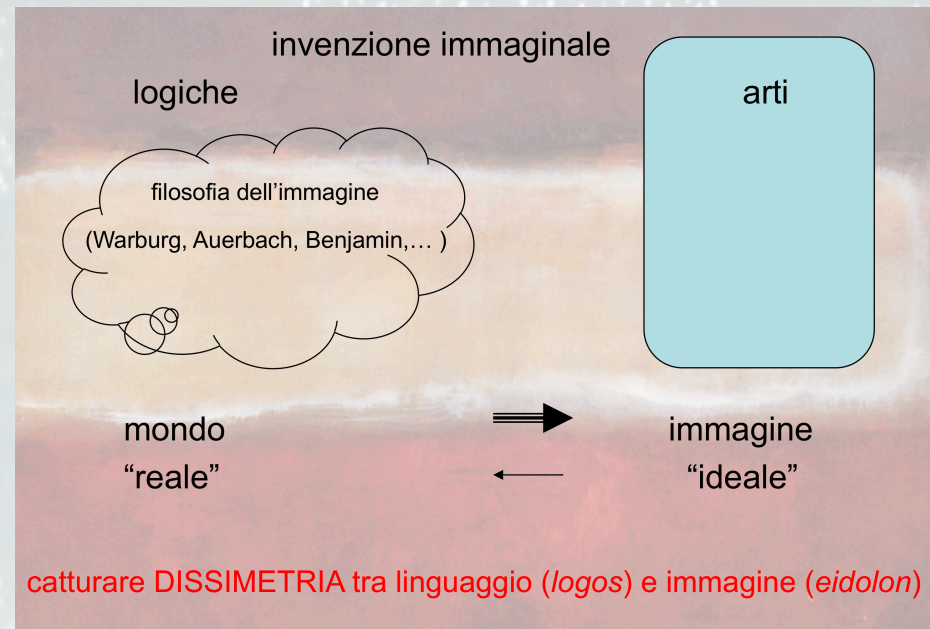
nuvola di Gromov

controllo linguistico

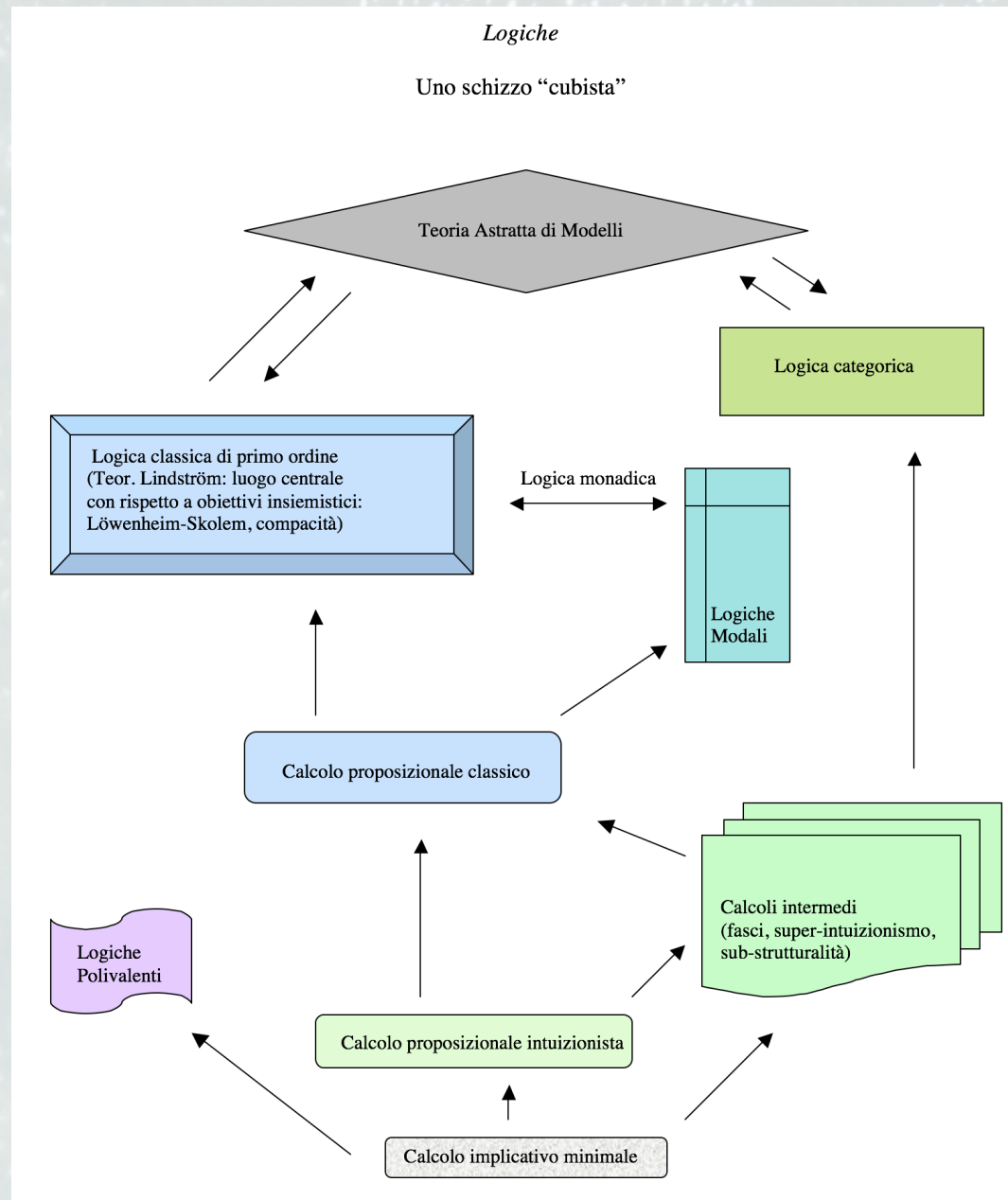
semiosi

liberazione visuale

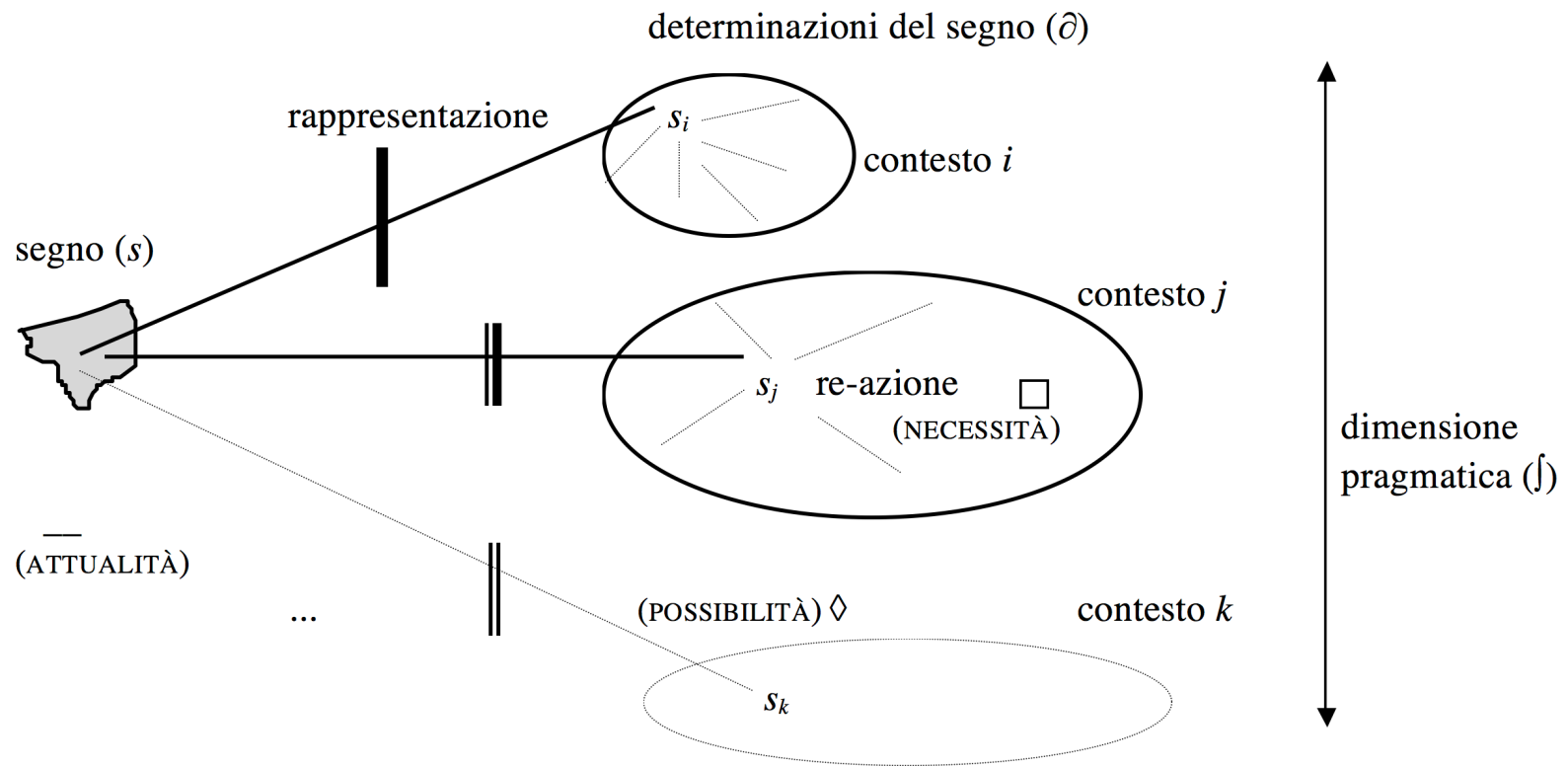
1.3.3. Linguaggio e immagin(azion)e (Aby Warburg)



1.3.4. Logica universale (= logiche)



1.3.5. Pragmatica (Charles S. Peirce)



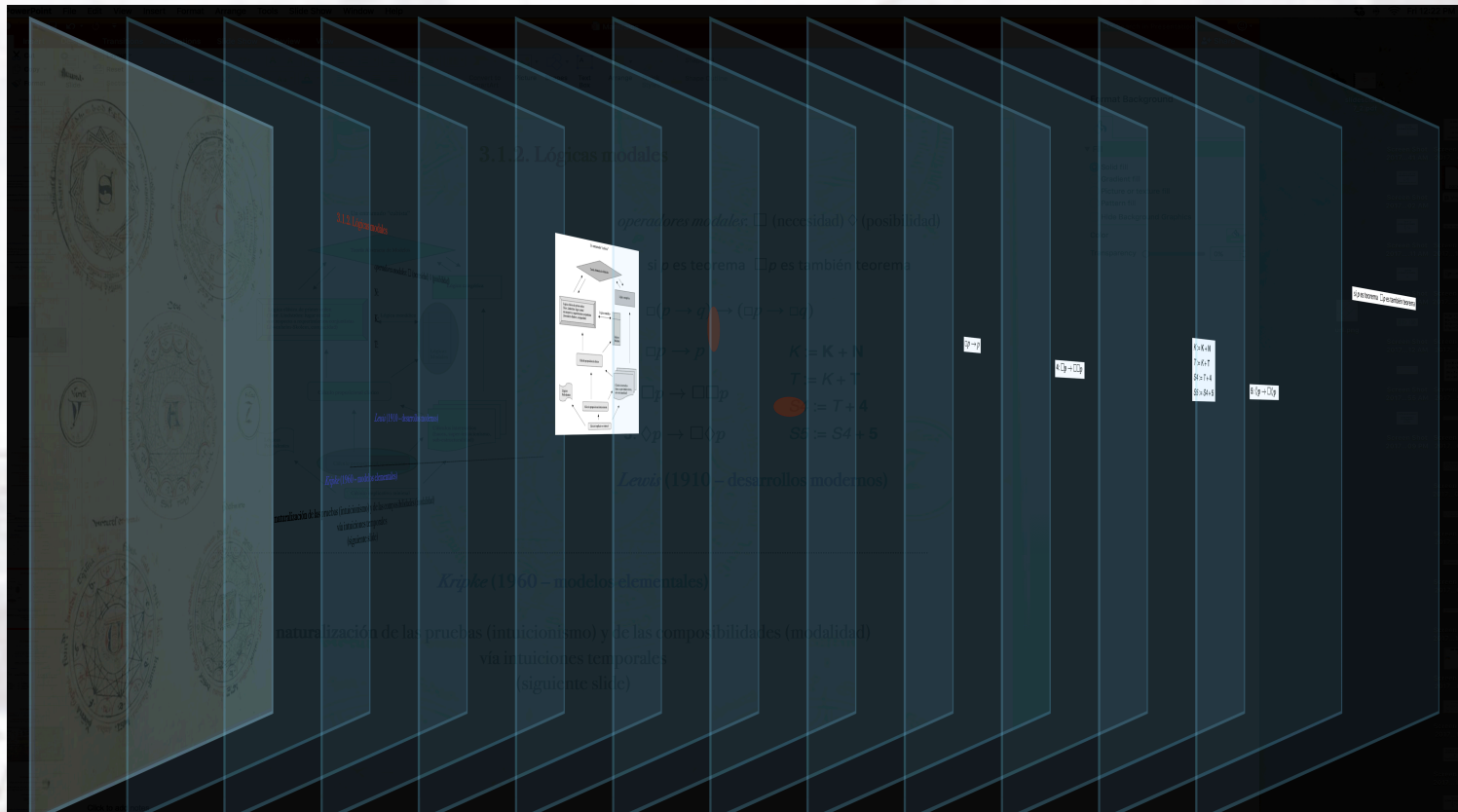
1.4.1. Le categorie della FIL-MAT

MOLTEPLICITÀ / DIFFERENZIAZIONE

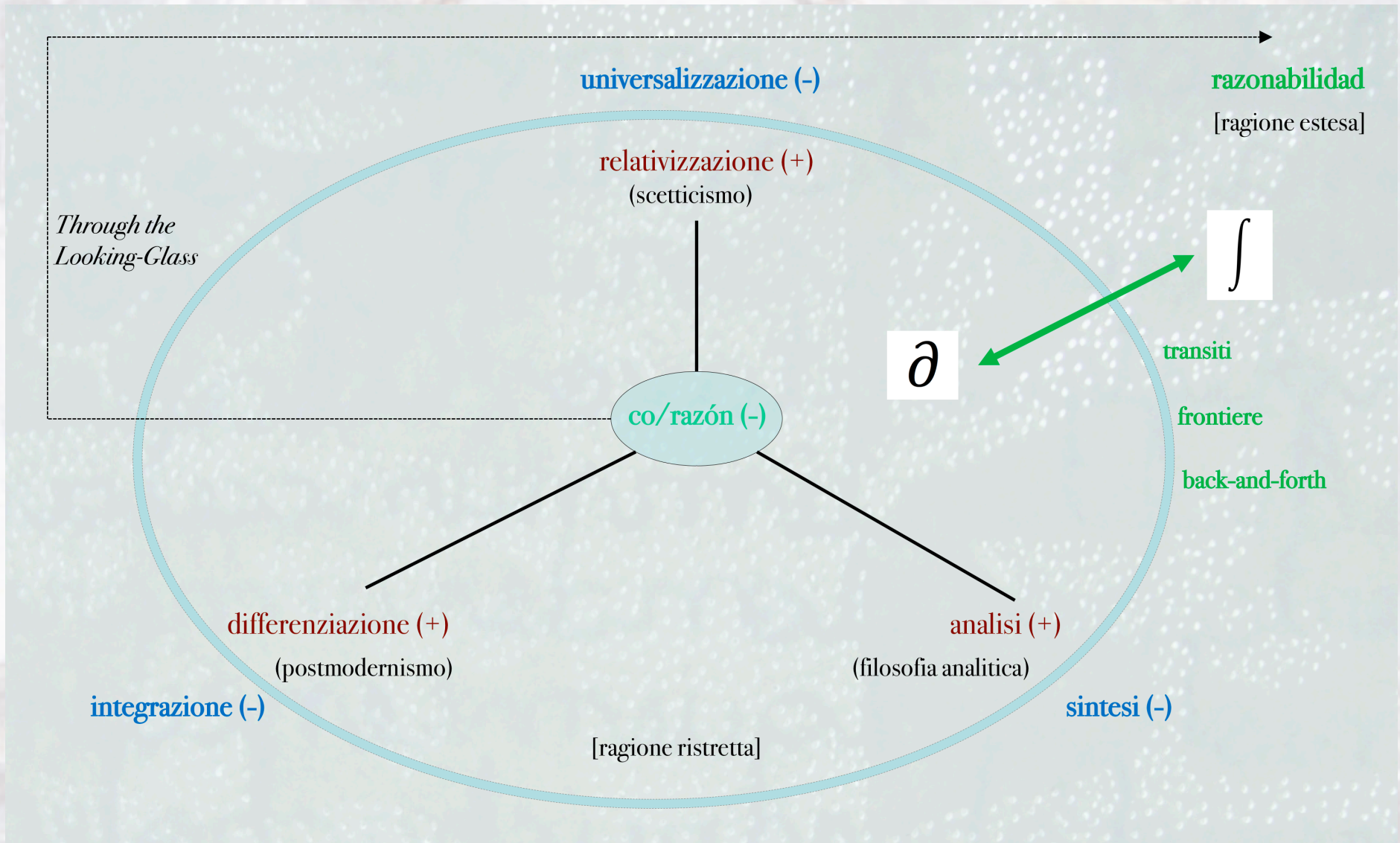
contesti – livelli – gerarchie – ramificazioni

UNITÀ / INTEGRAZIONE

universali relativi – teoria delle categorie – rete di logiche



1.4.2. Prima Triade -/+



Sabato Ottobre 14

2

FASCI E TOPOI

2.1. Tecniche matematiche

- 2.1.1. Topologia insiemistica
- 2.1.2. Continuazione analitica e fasci
- 2.1.3. Topologie di Grothendieck
- 2.1.4. Fasci sopra un sito
- 2.1.5. Topoi di Grothendieck

2.2. Pensatori della matematica

- 2.2.1. Serre
- 2.2.2. Grothendieck (1, 2)

2.3. Problemi filosofici

- 2.3.1. Lo spazio (Riemann - Grothendieck)
- 2.3.2. Molteplicità e unità
- 2.3.3. Transiti e ostruzioni
- 2.3.4. Ontologia transitoria (Badiou)
- 2.3.5. Epistemologia dinamica (Châtelet)

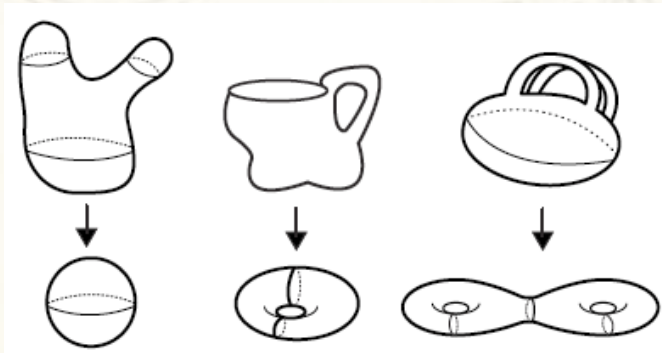
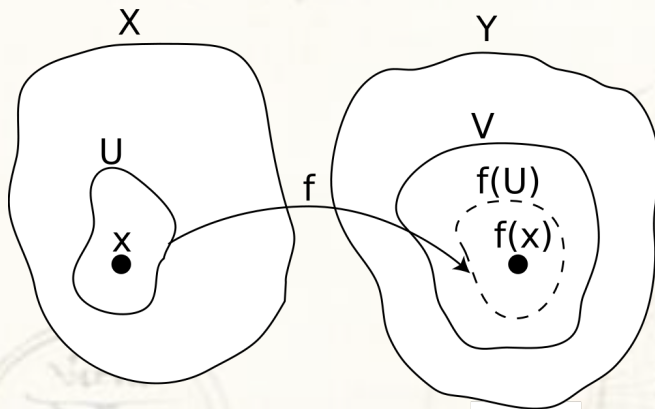
2.4. Sintesi

- 2.4.1. I fasci della filosofia matematica
- 2.4.2. Seconda Triade -/+

2.1.1. Topologia insiemistica

contesto matematico **analitico** per parlare di continuità

buon trasferimento (inverso) di vicinanze in vicinanze



TOPOLOGIA DI INSIEMI DI PUNTI

CANTOR

Serie di 6 articoli (1879-1884): *Sulle varietà lineari infinite di punti*

(Art. 1^o, 1879): continuo legato a insiemi derivati;
classificazione di insiemi di punti:
prima specie, seconda specie, densità;
potenze di insiemi

(Art. 2^o, 1880): continuo legato a de-composizioni di derivati;
generazioni "dialettiche" e successioni di "concetti";
SIMBOLI INFINITI: germi dei numeri trasfiniti

(Art. 3^o, 1882): multidimensionalità;
potenza e enumerabilità;
speculazioni di applicazione alla Natura

(Art. 4^o, 1883): insiemi **isolati e di contenuto zero**;
insiemi derivati e enumerabilità

(Art. 6^o, 1884): insiemi **perfetti, densi in loro stessi, separati**;
de-composizioni e connessioni con enumerabilità

[L'Art. 5^o, "Fondamenti per una teoria generale degli insiemi" (1883) merita lettura aparte]

Classificazione di insiemi di punti dalle sue proprietà topologiche

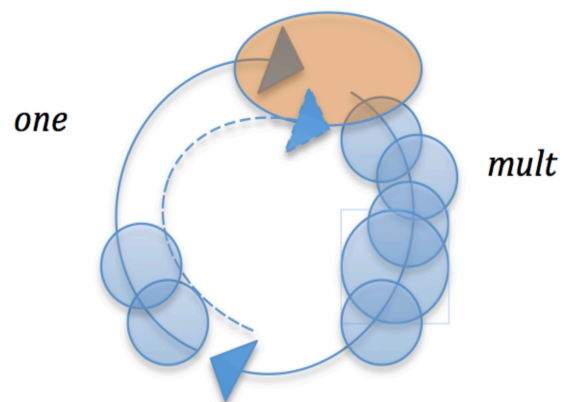
Forza della topologia:

de-composizioni, iterazioni, estensioni **qualitative**

2.1.2. Continuazione analitica e fasci

XIXth century

ANALYTIC CONTINUATION
(Riemann)



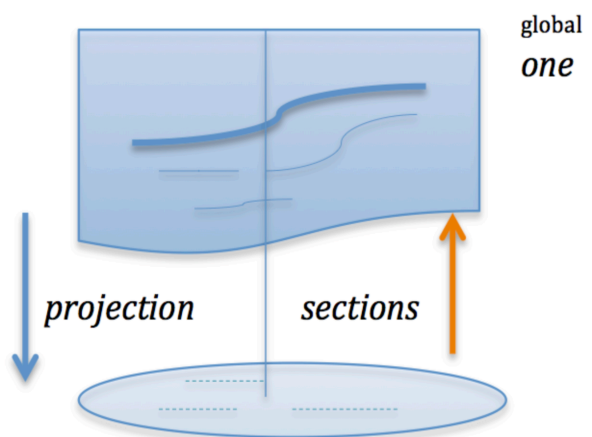
main obstruction:
glued function may be **multivalued**

obstruction solved if

- gluing is independent of **path**
- region is simply connected
(Monodromy Theorem)

XXth century

SHEAVES
(Leray, Cartan, Serre)



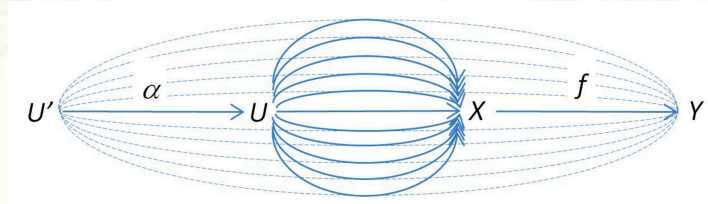
main obstruction:
global sections may not exist

space of germs of analytic functions
is Hausdorff
(because of analytic continuation)
general sheaves **NON-SEPARATED**



2.1.3. Topologie di Grothendieck

contesto matematico **sintetico** per parlare di continuità – buon trasferimento (inverso) di setacci in setacci



IHES (Grothendieck, Artin, Giraud, Verdier) SGA 1962-63

topologia di Grothendieck

in categorie con proprietà di esattezza:

nozione astratta di *ricoprimento* (famiglia stabile di morfismi) / *setaccio* (ideale di morfismi)

nozione astratta di *topologia* (collezione J di ricoprimenti / setacci)

sito (categoria C con una topologia di Grothendieck)

nozione astratta di **fascio**: **prefascio** (funttore $C^{op} \rightarrow \mathbf{Ens}$) che *equalizza* certi ricoprimenti

topos di Grothendieck: topos $Sh(C, J)$ di fasci sopra un sito



Giraud (piccolo): subcategorie riflessive provengono da topologie

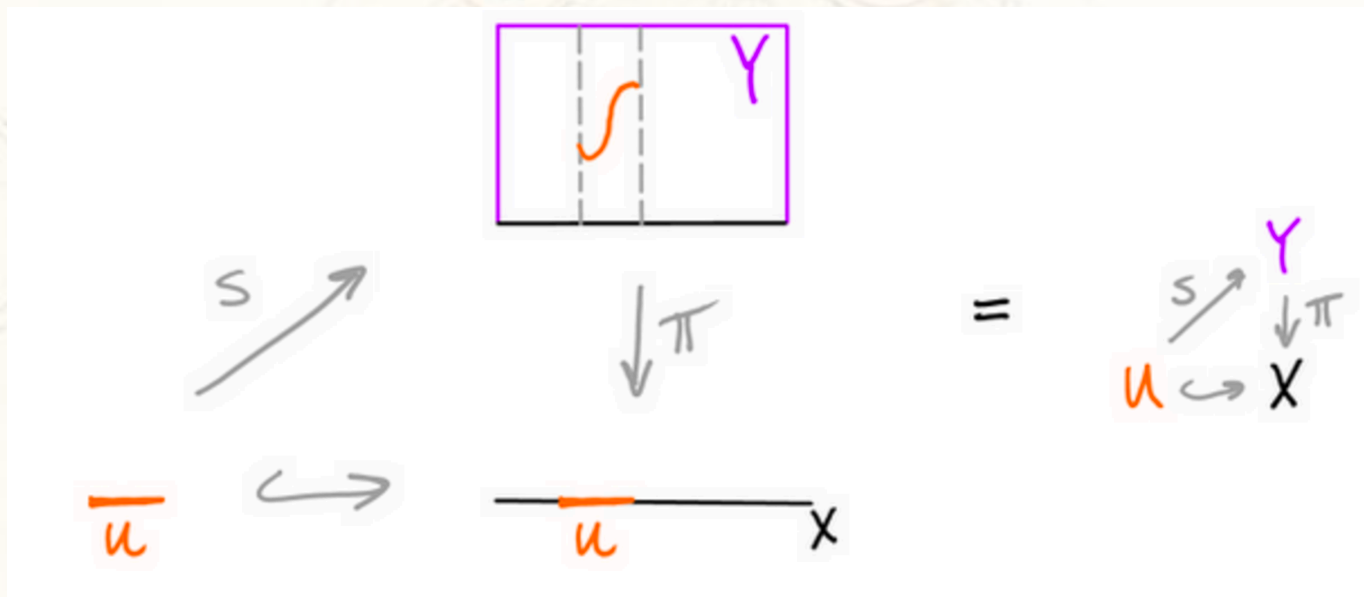
Giraud (grande): caratterizzazione intrinseca dei topoi di Grothendieck

2.1.4. Fasci sopra un sitio

sitio (C, J) :

categoria C (qualunque) con topologia J di Grothendieck

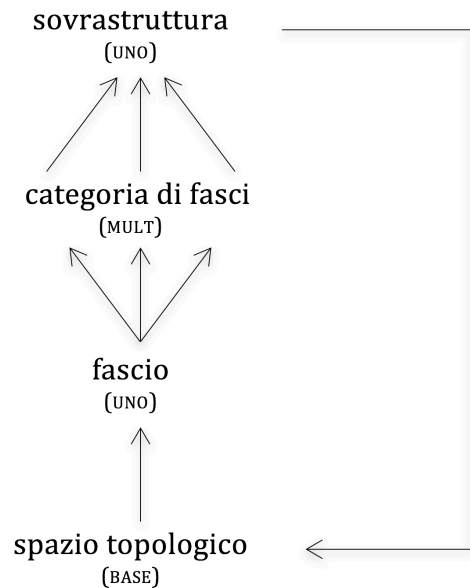
prefascio (funttore $C^{op} \Rightarrow \mathbf{CON}$) è **fascio** sopra (C, J)
se soddisfa una buona *proprietà di estensione* (per ricoprimenti coerenti nel sitio)



2.1.5. Topoi di Grothendieck

"Sono stato (seguendo a Cartan e Serre) uno dei principali utilizzatori e promotori di una delle grandi nozioni novatrici introdotte da Leray, quella di **fascio**, che fu uno degli strumenti essenziali per la mia opera di geometra. È lei quella che mi ha dato la chiave per estendere la nozione di spazio (topologico) in quella di topos" [*Récoltes et Semailles*, P13 (1986)]

"La «sovrastuttura di percorsi» composta da tutti i fasci sopra uno spazio (topologico), chiamata «**categoria di fasci**» (sopra lo spazio considerato) è l'incarnazione essenziale dello spazio" [*Récoltes et Semailles*, P38 (1986)]



topologie

fasci

schemi

topologie di Grothendieck

topoi

logica dei topoi (Lawvere)

logica dei fasci (Caicedo)

estensione della nozione di numero

estensione della nozione di spazio

estensione della nozione di logica

2.2.1. Jean-Pierre Serre

quando
n. 1926

dove
Francia

1945-48: ENS

1951: Tesi (dir. Cartan; successioni spettrali, fibrazioni)

1951-53: gruppi di homotopia delle sfere S^n

1954- : Medaglia Fields - Bourbakista – “maestro” di Grothendieck

1955: *FAC* (geometria algebrica & fasci)

1956: *GAGA* (geometria algebrica & variabile complessa)

1957- : teoria dei numeri: corpi di classe, cohomologia

Groupes algébriques et corps de classes (1959)

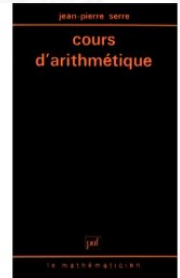
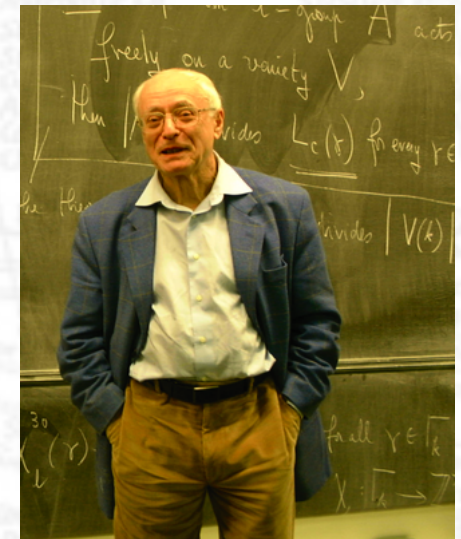
Corps locaux (1962)

Cohomologie galoisienne (1964)

Cours d'arithmétique (1970)

2003: Premio Abel

solo 2 *tesisti* (!), ma grandissima influenza indiretta



2.2.2. Alexander Grothendieck (1)



andare e venire tra **margini** e **centro**

Padre (Alexander Shapiro): anarchico russo, risse contra lo zar, radicale in Germania anni 20 e in Francia anni 30, brigadista nella Guerra Civile spagnola, interno in Le Vernet, assassinato in Auschwitz (1942); Madre (Hanka Grothendieck): conosce a Shapiro nei circoli radicali tedeschi, giornalista in riviste di sinistra, viaggia in Francia e Spagna con Shapiro, dopo la vittoria di Franco se riunisce con su figlio, è interna in Rieucros, sopravvive e continua con Alexander in Montpellier

- Nascimento: 1928 (marzo 28), Berlino
- Media infanzia: 1933-39: sotto la cura del padre luterano Heydorn, vicino Berlino
- **Adolescenza: 1940-42:** interno in Rieucros; 1942-45: sotto la cura del padre protestante Trocmé, in Chambon
- **Carriera (matematica): 1945-48:** Montpellier (“straordinaria capacità, squilibrata dalla sofferenza”)

-
- **Iniziazione alte matematiche: 1948: Séminaire Cartan; 1949-53: Dottorato in Nancy (Dieudonné, Schwartz)**
 - **Visite (spazi vettoriali topologici, geometria algebrica): 1953-54: Sao Paulo; 1955: Kansas, Chicago**
 - **Il grande centro: 1959-70: professore al IHES, creato specialmente per lui; Medaglia Fields 1966**

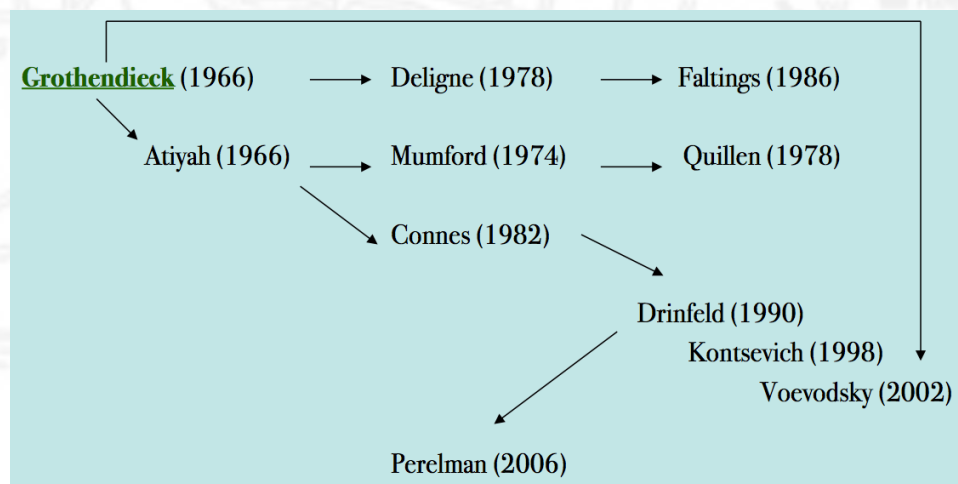
-
- **1970: si ritira dal IHES per ragioni politiche; forte attivismo in gruppi ecologisti**
 - **1970-83: lavori parziali nel Collège de France, il CNRS e la Université de Montpellier**
 - **1981-87: estensi manoscritti (matematica 1981-84, filosofia 1986-87)**
 - **1991-2014: scompare dalla comunità e si ritira in un piccolo borgo nei Pirinei**
 - **2014 (novembre 13): morte a Saint-Girons**

2.2.2. Alexander Grothendieck (2)

Lavori (somma in *Récoltes et semailles*)

1. Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires.
2. Dualité "continue" et "discrete" (catégories dérivées, "six opérations").
3. Yoga Riemann-Roch-Grothendieck (K-théorie, relation à la théorie des intersections).
- 4.. Schémas.
5. Topos.
6. Cohomologie étale et ℓ -adique.
7. Motifs et groupe de Galois motivique ($\otimes$ -catégories de Grothendieck).
8. Cristaux et cohomologie cristalline, yoga "coefficients de De Rham", "coefficient de Hodge"...
9. "Algèbre topologique" : ∞ -champs, dérivateurs ; formalisme cohomologique des topos, comme inspiration pour une nouvelle algèbre homotopique.
10. Topologie modérée.
11. Yoga de géométrie algébrique anabélienne, théorie de Galois-Teichmüller.
12. Point de vue "schématique" ou "arithmétique" pour les polyèdres réguliers et les configurations régulières en tous genres.

Influenza nel Panorama Fields



2.3.1. Lo spazio (Riemann – Grothendieck)

Riemann

GÉNERO ($\int$ - UNO) : variedad abstracta

ESPECIES (∂ - MÚLTIPLE)

CONTINUO

DISCRETO

VARIEDAD DIFERENCIAL ABSTRACTA

"relaciones regionales" (topológicas/diferenciales)
cirugía general: ascenso sintético / descenso analítico

MÉTRICO

VARIEDAD DIFERENCIAL MÉTRICA

"relaciones de tamaño" (métricas)
elemento de línea general $ds^2 = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} dx_i dx_j$

DIALÉCTICAS

INTERIOR / EXTERIOR
geodésicas / espacios tangentes

INTRÍNSECO / EXTRÍNSECO
curvatura intrínseca / curvatura extrínseca

LOCAL / GLOBAL

fondo escondido en la Lección:
superficies de Riemann, continuación analítica, Riemann-Roch
HACES

curvatura constante
elemento de línea ds^2 sub-general
tipología topológica

curvatura nula (variedades planas)
elemento de línea ds^2 euclidean

plano & espacio
fundamentados a posteriori

- límites inexactos
- determinados bajo hipótesis adicionales
- gobernados de forma natural por la variable compleja

Grothendieck

TOPOS ÉTALE DE UN ESQUEMA

categoría de haces conjuntistas sobre el sitio étale

categoría de haces abelianos sobre sitio étale
[categoría abeliana]

cohomología étale [aplique *Tohoku*]
resolución Conjeturas Weil

sitio étale

topología étale:
cubrimientos de esquema por morfismos étales

morfismo étale: no singular + no ramificado
("liso": Víctor Hugo) (GALOIS + RIEMANN)

TOPOS

categorías de haces sobre topologías de Grothendieck

TOPOLOGÍAS DE GROTHENDIECK

familias recubridoras

operador clausura

RIEMANN

GEOM (ext)

GALOIS

ALG (int)

ESQUEMAS

anill. con. unit.
haces sobre espectro
de ideales primos
fibras anillos locales

R-R-G

anillos de funciones
holomorfas/meromorfas

anillos de enteros
algebraicos

FAC + GAGA (Serre)

continuación
analítica

HACES

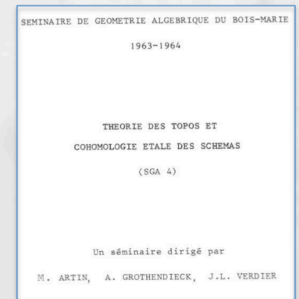
grupos abelianos
CATEGORÍAS ABELIANAS

RIEMANN

CONT

GALOIS

DISCR



2.3.2. Molteplicità e unità



2.3.3. Transiti e ostruzioni

transito matematico

cosa	<u>come</u>	<u>perché</u>	<u>quando</u>	<u>dove</u>
oggetti	modi	ragioni	momenti	luoghi
<i>esempi</i> <i>problemi</i>	<i>trasformazioni</i> <i>regolazioni</i>	<i>ostruzioni</i> <i>singularizzazioni</i>	diagrammi temporali	diagrammi culturali
ontologia	epistemologia	metafisica	“storia”	“geografia”

contestazione filosofica e culturale

2.3.4. Ontologia transitoria (Badiou)

■ back-and-forth ontologico/epistemico

approcci parziali a strati di idealità e realtà

modulazioni asintotiche

ricoprimento coerente degli approcci asintotici

gli oggetti matematici NON vivono in contesti fissi, assoluti

si modulano e crescono (teoremi di rappresentazione) lungo la loro evoluzione

si eludono rigide demarcazioni ontologiche e epistemiche

ONTOLOGIA DEL TRANSITO (Alain Badiou)

2.3.5. Epistemologia dinamica (Châtelet)

■ transitorietà generale tra fenomenologia, ontologia e epistemologia

la filosofia delle matematiche (pluralità) e della matematica (unità)
debe consistere nella
*conoscenza relativa –parziale, gerarchica, distribuita– di quei **transiti***

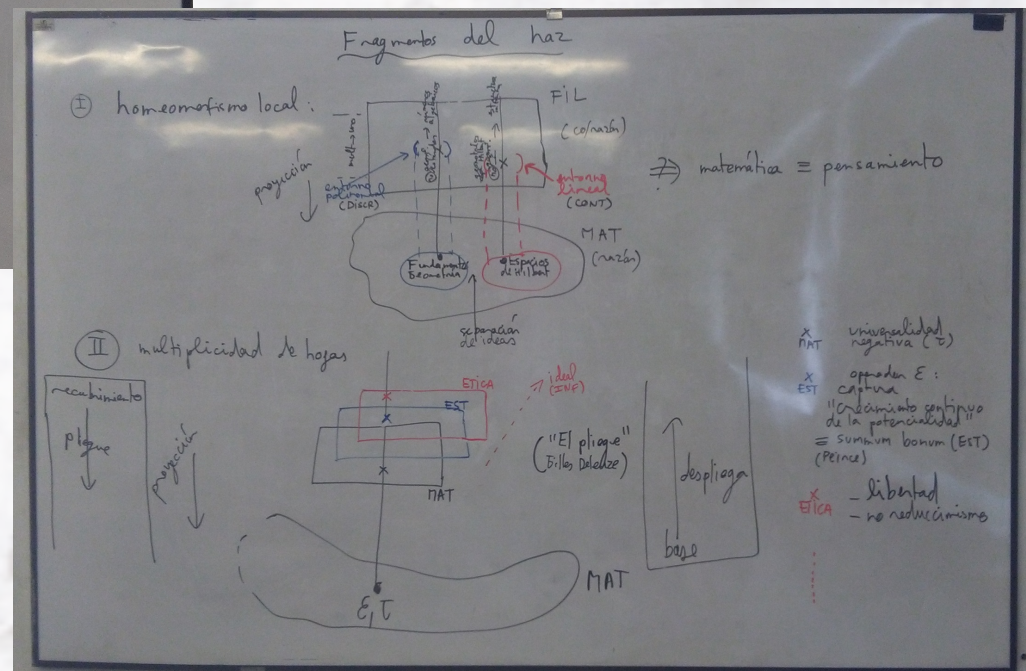
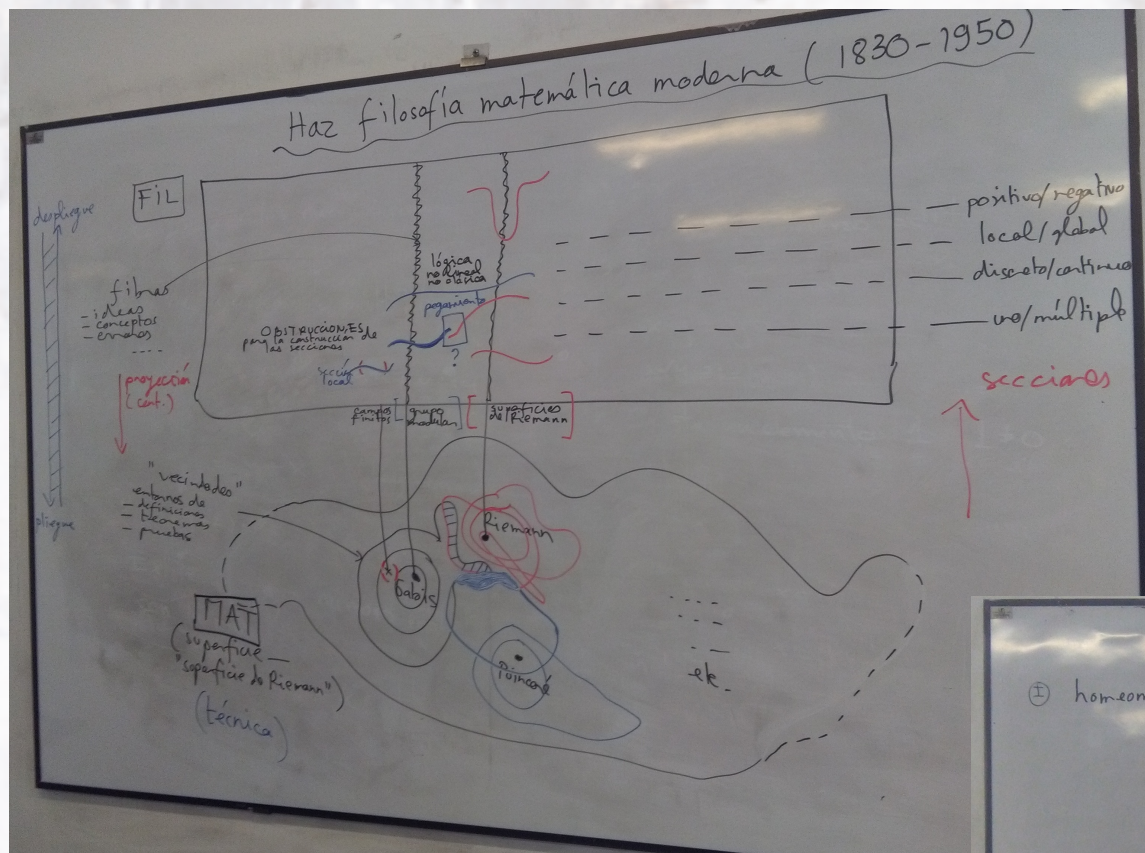
comprensione profonda di transiti / ostruzioni / invarianze

Galois – Riemann
s. XIX

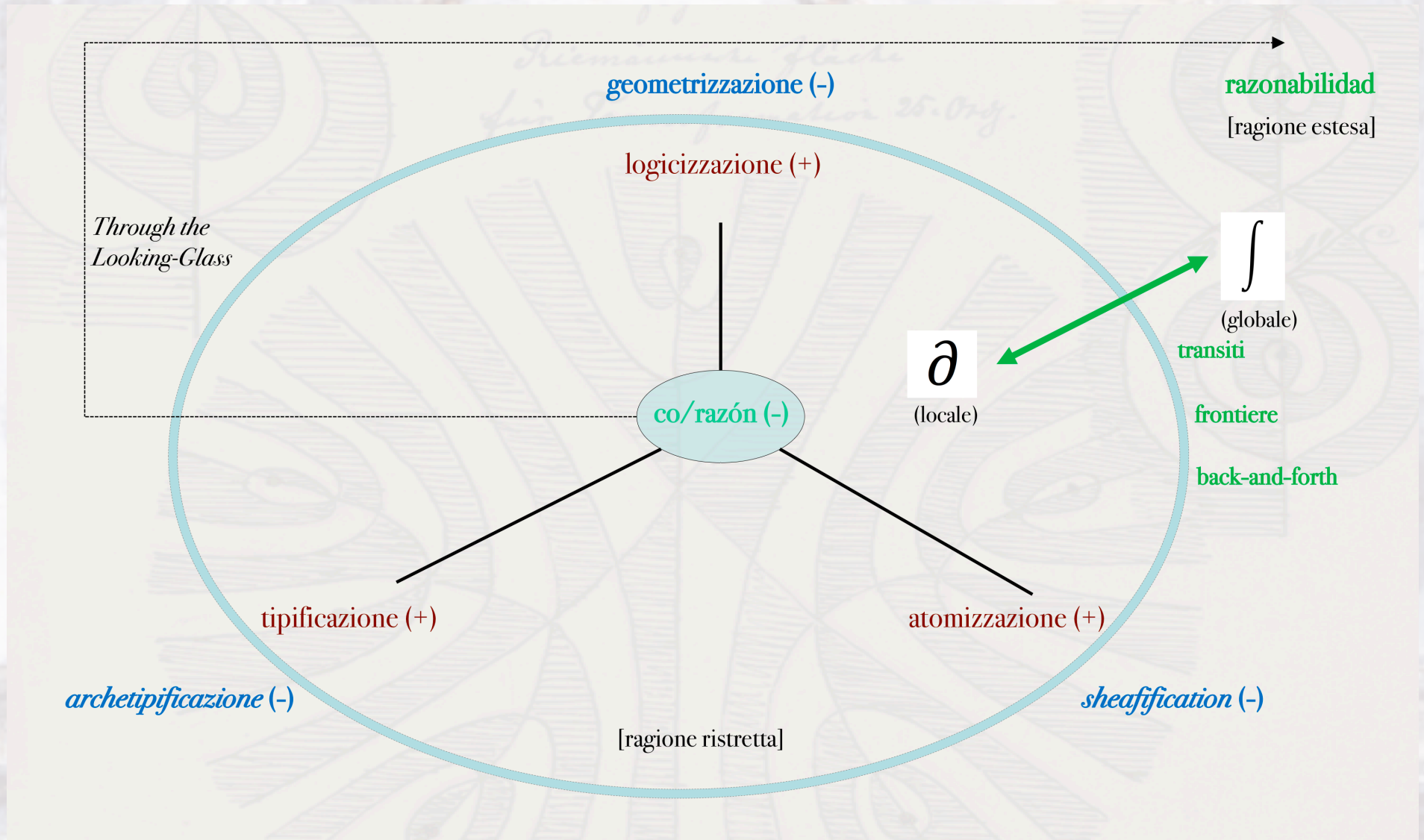
Hilbert – Grothendieck
s. XX

permette eludere bipolarità +/- , luce/oscurità
EPISTEMOLOGIA DINAMICA (Gilles Châtelet)

2.4.1. I fasci della filosofia matemática



2.4.2. Seconda Triade -/+



Domenica Ottobre 15

3

LOGICHE NON CLASSICHE

3.1. Tecniche matematiche

- 3.1.1. Logica intuizionista
- 3.1.2. Logiche modali
- 3.1.3. Modelli di Kripke
- 3.1.4. Topoi elementari
- 3.1.5. Logica dei topoi

3.2. Pensatori della matematica

- 3.2.1. Kripke
- 3.2.2. Lawvere

3.3. Problemi filosofici

- 3.3.1. Il tempo
- 3.3.2. Linearità e ramificazione
- 3.3.3. Statica e dinamica (Benjamin)
- 3.3.4. Storia e contaminazione (Cavaillès)
- 3.3.5. Fenomenologia della frontiera (Peirce)

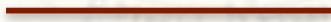
3.4. Sintesi

- 3.4.1. Le negazioni della filosofia matematica
- 3.4.2. Terza Triade -/+

3.1.1. Logica intuizionista

Brouwer (1915 – intuizionismo)

(1) continuo



(2) tagli (“due-in-uno”)



inversione del processo analitico cantoriano usuale

prima: l'intuizione sintetica del continuo (magnitudine)

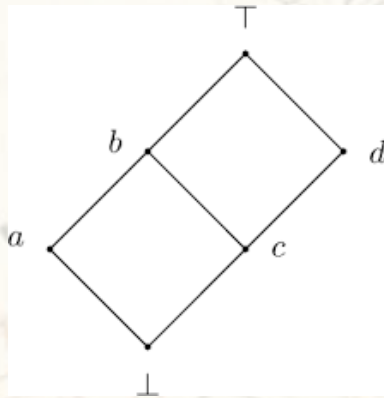
dopo: la comprensione di tagli discreti (numero)

Heyting (1930 – calcolo intuizionista)

eliminazione del terzo escluso e forme equivalenti

(1) semantica

algebre di Heyting



(2) sintassi

calcolo intuizionista

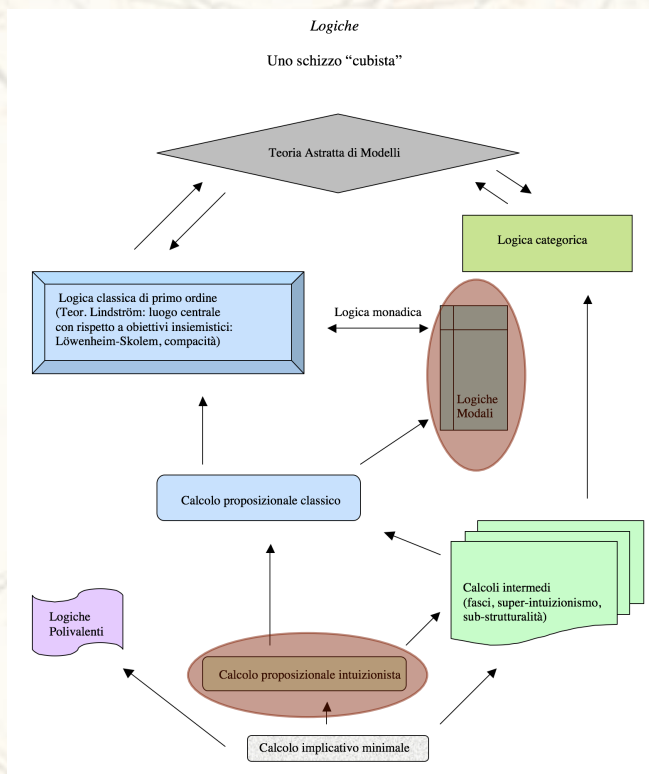
non valgono

$$p \vee \neg p$$

$$\neg \neg p \Rightarrow p$$

De Morgan & altri

3.1.2. Logiche modali



operatori modali: $\Box$ (necessità) $\Diamond$ (possibilità)

N: se p è teorema $\Box p$ è anche teorema

K: $\Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q)$

T: $\Box p \rightarrow p$

4: $\Box p \rightarrow \Box \Box p$

5: $\Diamond p \rightarrow \Box \Diamond p$

$K := K + N$

$T := K + T$

$S4 := T + 4$

$S5 := S4 + 5$

Lewis (1910 – sviluppi moderni)

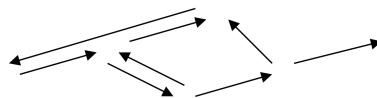
Kripke (1960 – modelli elementari)

naturalizzazione delle dimostrazioni (intuizionismo) e delle compossibilità (modalità)
attraverso intuizioni temporali (seguinte slide)

3.1.3. Modelli di Kripke

(a) Logiche modali

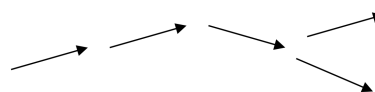
relazione arbitraria di accessibilità tra mondi possibili



- | | | | | |
|------------|------------------------------------|-----------|---|-----------|
| $\Box$ | <i>necessità</i> in un mondo a | significa | validità in <i>tutti</i> i mondi accessibili da a | $\forall$ |
| $\Diamond$ | <i>possibilità</i> in un mondo a | significa | validità in <i>qualche</i> mondo accessibile da a | $\exists$ |

(b) Logica intuizionista

albero di ordine temporale tra spazi costruttivi



- | | | | |
|------------|---|-----------|--|
| $\neg$ | <i>negazione</i> in un mondo a | significa | non validità in <i>nessun</i> spazio futuro dopo a |
| $\neg\neg$ | <i>doppia negazione</i> in un mondo a | significa | validità <i>densa</i> nel futuro di a |

modalità

$\Diamond p \Rightarrow \Box p$
è falsa nel modello
 $\begin{array}{c} p \\ a \rightarrow \Box \\ b \end{array}$

$\Box p \Rightarrow \Diamond p$
è falsa nel modello
 $\begin{array}{c} \Box \\ a \end{array}$

- | | |
|-------------------------|----------------------------------|
| $(M, R) \triangleright$ | $\Box p \rightarrow p$ |
| $(M, R) \triangleright$ | $p \rightarrow \Box \Diamond p$ |
| $(M, R) \triangleright$ | $\Box p \rightarrow \Box \Box p$ |
| $(M, R) \triangleright$ | $\Box p \rightarrow \Diamond p$ |
| $(M, R) \triangleright$ | $\Diamond p \rightarrow \Box p$ |

- R riflessiva
- R simetrica
- R transitiva
- $\text{dom}(R)=M$
- R funzione

intuizionismo

$p \vee \neg p$
 $\neg\neg p \Rightarrow p$

sono false nel modello

$\begin{array}{c} \Box \\ a \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} p \\ b \end{array}$

(nessuna delle due sentenze vale in a)

3.1.4. Topoi elementari

(Lawvere, Tierney 1969-70; Kock, Freyd 1971-72; Johnstone 1977)

programma di assiomatizzazioni categoriche di primo ordine (elementari)

teorie algebrica	<i>Set</i>	<i>Cat</i>
1963	1963	1966

categorie cartesiane chiuse con suboggetto classificatore (*Sub* rappresentabile: $Sub(\text{---}) \approx Mor(\text{---}, \Omega)$)

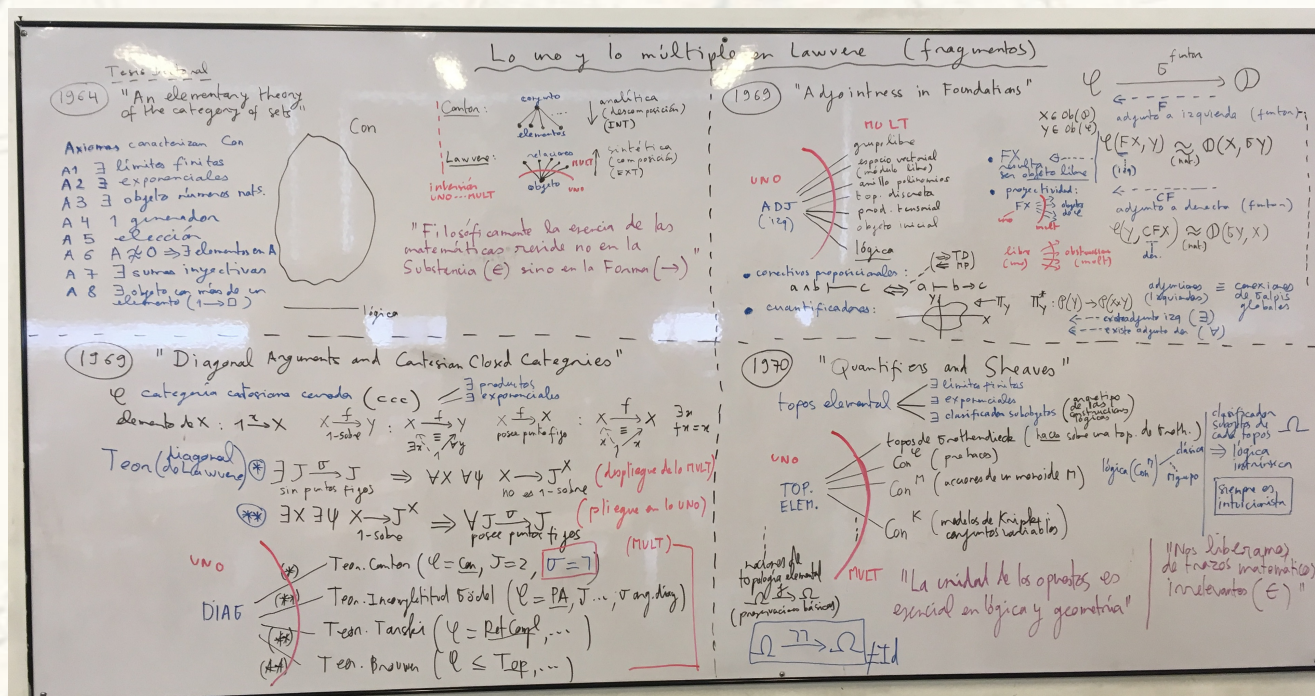
$$+ \text{limiti} = \text{topoi elementare } E$$

categorie elementare di **fasci** (1970)

topologia elementare:

$$j: \Omega \rightarrow \Omega \quad \text{tale che} \quad jT = T \quad jj = j \quad j\wedge = \wedge (j \times j)$$

fascio elementare:

caratterizzazione via estensione di morfismi j -densi

3.1.5. Logica dei topoi

la logica dei topoi elementari sempre è **intuizionista**

a seconda di condizioni ulteriori sul topos, la logica sarà **super-intuizionista**
(logica compresa tra il calcolo intuizionista e il calcolo classico)

Ins^M (azioni di un monoide)

logica del classificatore è
classica (topos booleano)
se e solo se
 M è gruppo

in forma simile, le **logiche dei fasci** (Caicedo 1994) sono sempre super-intuizioniste

Int logica dei fasci Clas
—————→

processi di limite nelle fibre

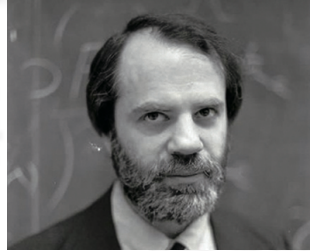
(reale)

inversione

(ideale)

3.2.1. Saul Kripke

quando
n. 1940



1962: Harvard (B.A.)

1959-: semantiche (“modelli di Kripke”) per
logiche modali e intuizioniste

1977-2002: Princeton

2002-: CUNY

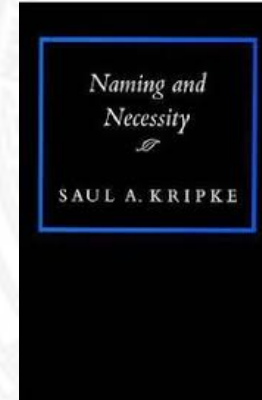
semantiche logiche non classiche

filosofia della logica

ricorsività e calcolabilità

Naming and Necessity (1972)

Collected Papers (vol. 1, 2011)



dove
USA

giovane prodigio

grande “vidente” della filosofia logica

3.2.2. William Lawvere

quando
n. 1937



1963: Tesis (teorie algebriche via categorie)

1964: assiomatizzazione *categorica* Ins

1969-70: topoi elementari

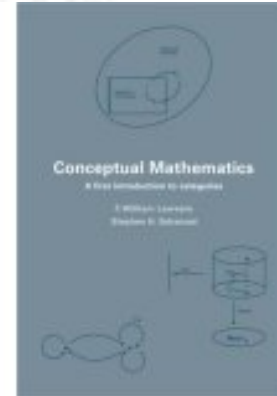
1970-80s: quantificatori e fasci

logica geometrica

categorie in geometria differenziale

categorie nella fisica continua

Conceptual Mathematics (con Schanuel) (1997)

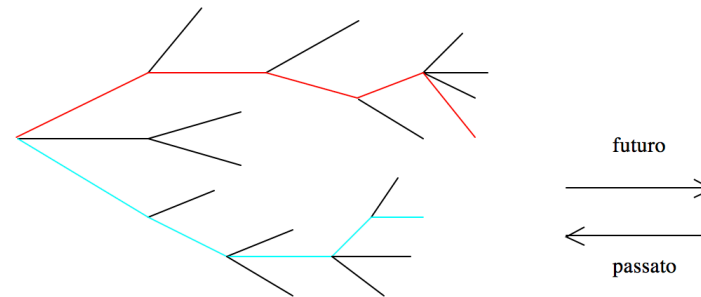


dove
USA

propulsore del pensiero categorico
grande “vidente” delle categorie

3.3.1. Il tempo

**frammenti locali di “alberi”
e apertura di un ventaglio di “rami” temporali verso il futuro**



assimetria “reale” del tempo:

le linee di tempo verso il passato sono lineari (azzurre o rosse nell’albero – determinatezza),
mentre che, verso il futuro, si aprono le ramificazioni (non determinatezza)

**non determinatezza *tecnica* del tempo verso il futuro
nei modelli di Kripke intuizionisti**

vale la *doppia negazione* di una proposizione in un “istante” dato
se e solo se vale *densamente* la proposizione nel futuro dell’istante

l’operatore *no-no*, non solo *non coincide* con il sì classico, ma è un operatore
che apre la possibilità di contemplare *verità residuali verso il futuro*,
non completamente determinate nel presente

la logica intuizionista è una logica specialmente bene adatta per lo studio delle variazioni,
dello costruibile in gestazione, non determinato dall’inizio

una forma debole della predestinazione, la legge del terzo escluso $p \vee \neg p$,
che irrigidisce dualmente il mondo, non vale nell’intuizionismo

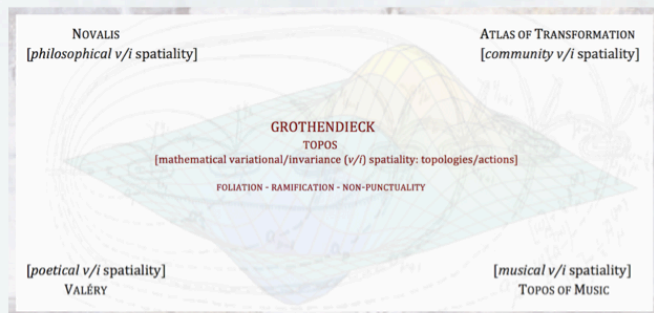
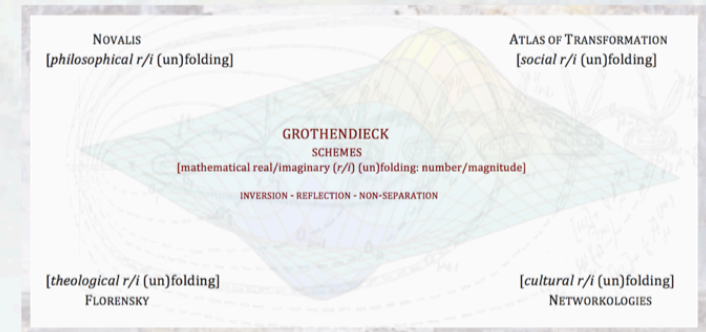
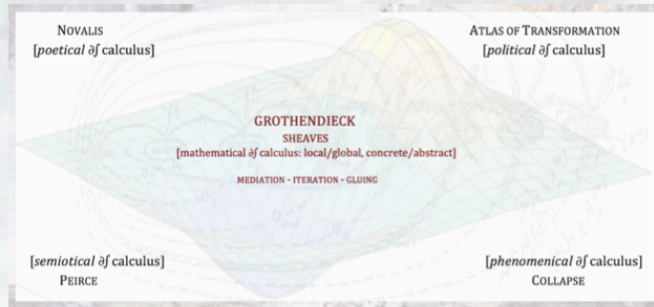
la legge $p \rightarrow q \vee q \rightarrow p$ (conseguenza debole del terzo escluso) vale in un modello de Kripke
se e solo se il modello è *lineare*: la linearità del tempo è una rigida sub-determinazione
che non vale in modelli di Kripke generali

3.3.2. Linearità e ramificazione

*lineare / planare
(predeterminatezza)*

*ramificato / multidimensionale
(libertà)*

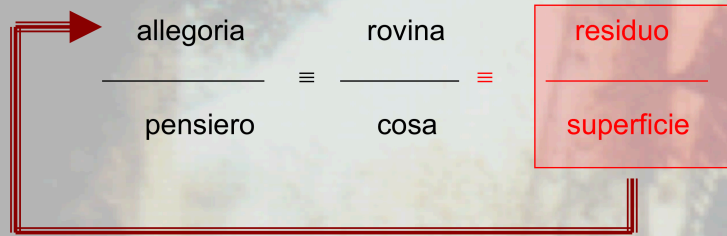
dobbiamo imparare a pensare multidimensionalmente
SUPERFICI DI RIEMANN
CATEGORIE
FASCI - TOPOI
MODELLI DI KRIPKE



3.3.3. Statica e dinamica (Walter Benjamin)



estensione della ragione

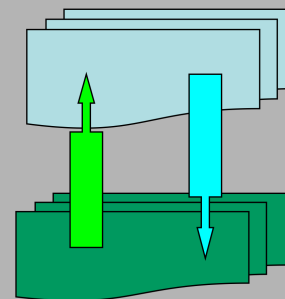


costruzioni e teorie matematiche
dentro della cultura:

valore euristico / analogico / allegorico (sì)

verso

valore dimostrativo / riduzionista (no)



3.3.4. Storia e contaminazione (Jean Cavaillès)

	matematica	
	tagli diacronici	fondo concettuale
1830-1950:	moderna (pionieri XIX: Galois, Riemann, Lie, Cantor)	strutturale
1950-oggi:	contemporanea (Grothendieck)	categoriale

in contra di Shapiro (e forme diverse della filosofia analitica della matematica)

		EPISTEMOLOGIA	
		<i>realismo</i>	<i>idealismo</i>
O N T O L O G I A	<i>realismo</i>	Maddy Resnik Shapiro	Tennant
	<i>idealismo</i>	Chihara Hellman	Dummett Field

transmodernità (1980: Rodríguez-Magda)

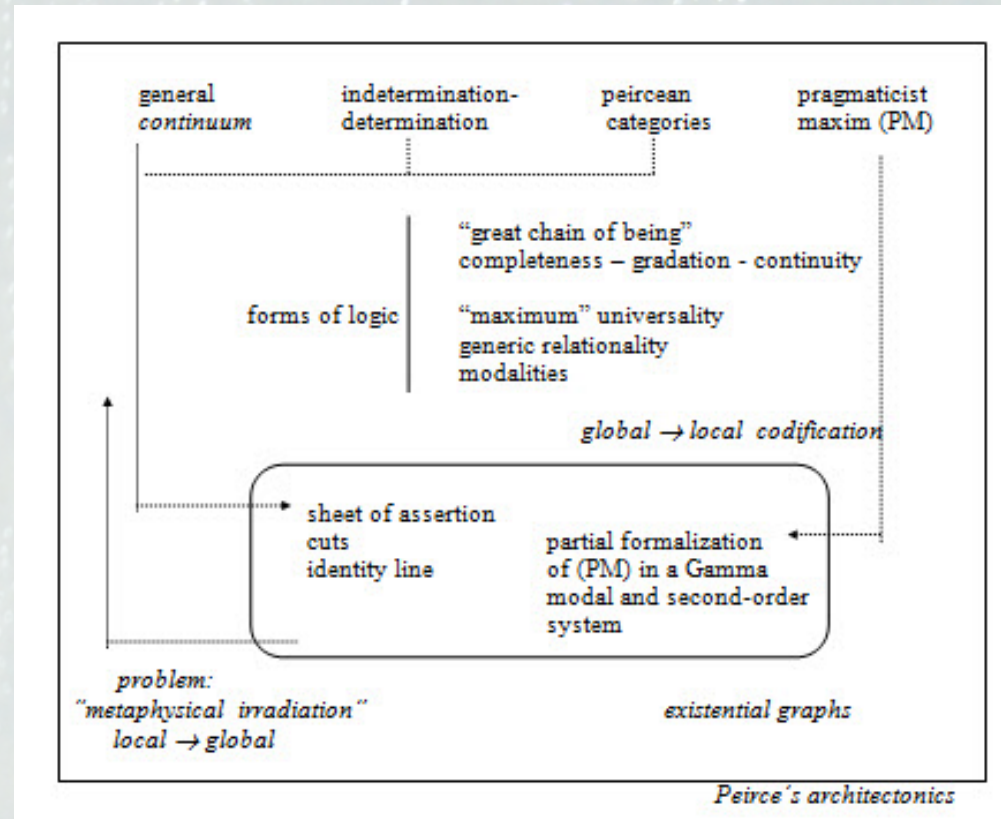
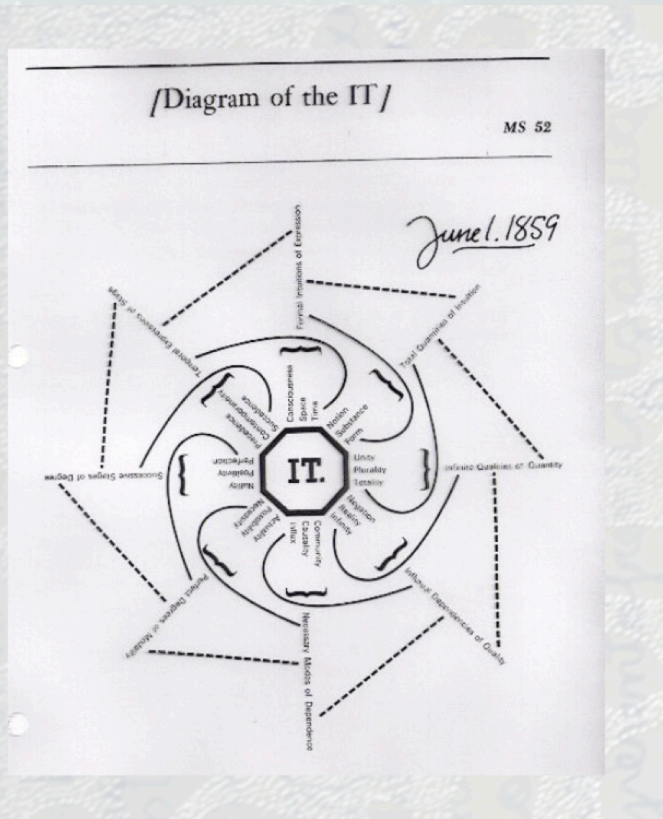
**filosofia francese della matematica nel secolo XX
(Poincaré, Cavaillès, Lautman, Desanti, Vuillemin, Châtelet, Petitot, Badiou...)**

- o matematica come scienza *storica*
- o matematica come conglomerato *evolutivo*, dentro della *vita* culturale
- o matematica come ampio reticolato *reale*, bene *al di là* di analisi / giochi di linguaggio
- o matematica come *laboratorio-guida* per ontologia e epistemologia *in estenso*
- o matematica come “*relais*” (legame, posta): luogo di incroci *trans*-disciplinari

in contra di una certa ricerca analitica di “purezza”, si tende a una

filosofia complessa della contaminazione

3.3.5. Fenomenologia della frontiera (Charles S. Peirce)



3.4.1. Le negazioni della filosofia matematica

preconcetti usuali sulla matematica	aperture moderne e contemporanee
assoluta	relazione
eterna	variazione
statica	dinamizzazione
vera	correzione
positiva	negazione
deduttiva	adduzione
fondata	graduazione

approcci / asintote dal NO

non associativo
non commutativo
non classico
non lineare
non elementare
non rigido
non euclideo

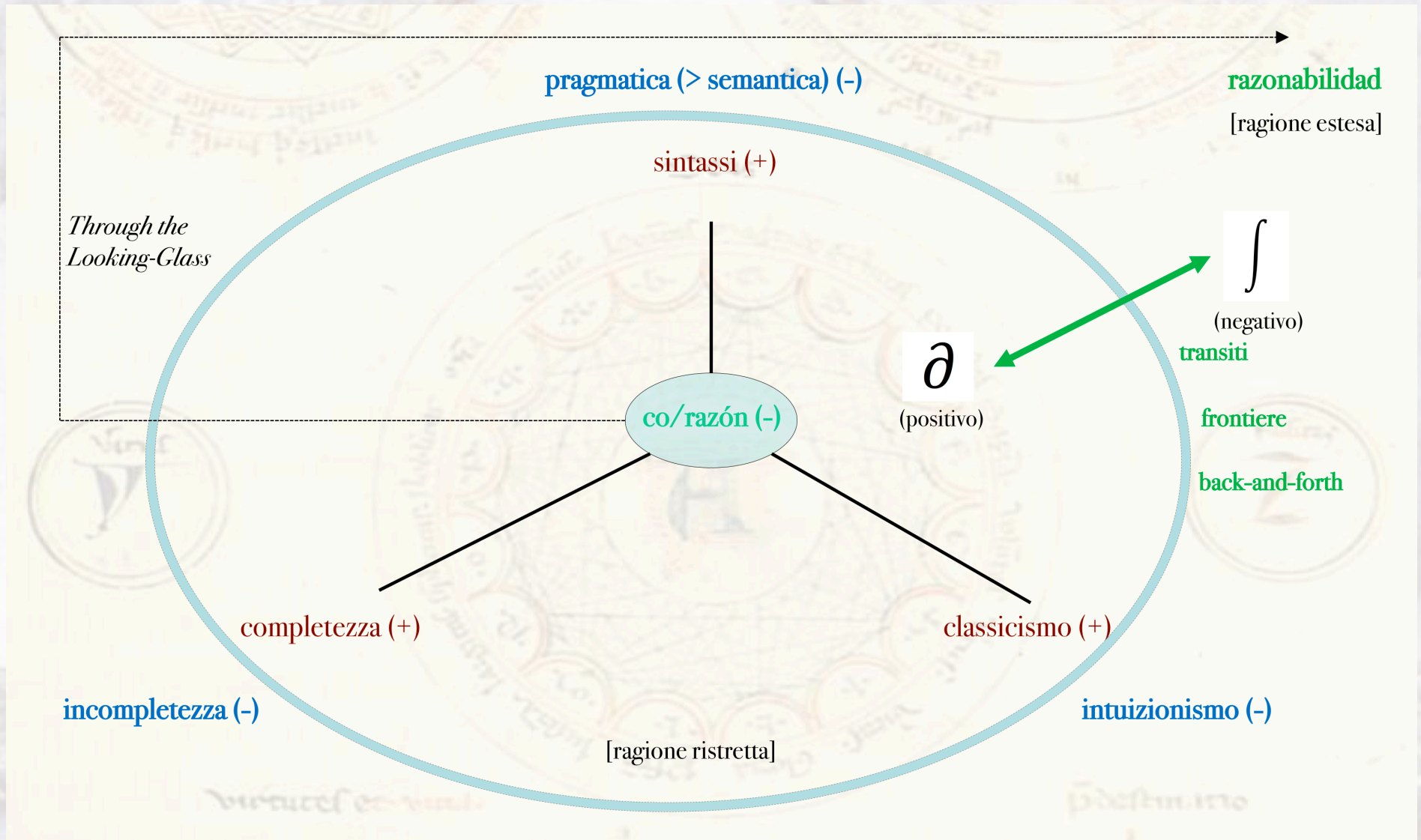
rete di deformazioni
rete di trasformazioni trasversali

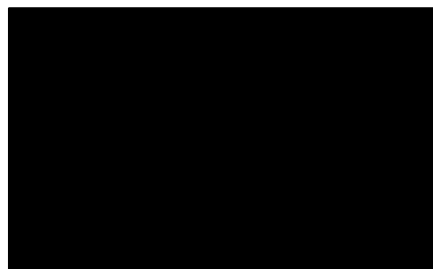
MATEMATICA CONTEMPORANEA (1950-oggi)

capire di nuovo, dal rovescio

- flussioni
- limitanti / limiti
- invarianze

3.4.2. Terza Triade -/+





FINE