EPISTEMOLOGÍA E HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS
SEMINARIO CONTINUO DE FILOSOFÍA DE LAS MATEMÁTICAS

"Un pensamiento, hoy ardientemente fluido, lava: pero toda lava construye una muralla a su alrededor, todo pensamiento acaba aplastándose con «leyes»"
(Friedrich Nietzsche, *Sentencias en verso*, 1888)

"Nada es más fecundo, lo saben todos los matemáticos, que esas obscuras analogías, esos reflejos turbios de una teoría en otra, esas caricias furtivas, esas inexplicables contrariedades"
(André Weil, *De la metafísica a las matemáticas*, 1960)

A partir del 2012-I, bajo el rótulo del curso *Epistemología e historia de las matemáticas*, orientaremos un Seminario de Filosofía de las Matemáticas Modernas (1830-1950) y Contemporáneas (1950-hoy), cuyo eje principal consistirá en el estudio sistemático de la **creatividad matemática avanzada**. El Seminario se dividirá en dos periodos:
(A) 2012-2016/I, dedicado a la exploración *local* de obras singulares de grandes matemáticos, y
(B) 2016/II-2018, dedicado a reflexiones *globales* sobre formas plurales de creatividad, con énfasis en el estudio de *estratos, tramas y flujos intermedios* entre polaridades mayores.

El objetivo del Seminario consistirá en ir produciendo nuevas aproximaciones al entendimiento de las **génesis en matemáticas modernas y contemporáneas**, a la estela de Albert Lautman, *Ensayos sobre la dialéctica, estructura y unidad de las matemáticas modernas* (Universidad Nacional, 2011) y Fernando Zalamea, *Filosofía sintética de las matemáticas contemporáneas* (Universidad Nacional, 2009). El Seminario deberá generar trabajos de tesis, artículos y monografías, combinando presentaciones del coordinador y trabajos subsiguientes de los asistentes.

A lo largo de cada semestre del periodo (A) el Seminario proveerá:

- introducciones a obras de matemáticos mayores que han transformado la disciplina
- discusiones acerca de las tensiones filosóficas subyacentes detrás de argumentos técnicos
- reflexiones metodológicas acerca de la complejidad de la creatividad matemática.

El material se organizará siguiendo cuatro aproximaciones complementarias:

(i) perspectiva *actual*: presentación conceptual de fragmentos de la obra matemática en cuestión
(ii) perspectiva *transversal*: discusión de las circunstancias filosóficas, técnicas y biográficas pertinentes
(iii) perspectiva *local*: análisis detallado de las **OBRAS ORIGINALES**, resaltando tramas y gradaciones, en zonas de penumbra, asociadas a obstrucciones y tránsitos en la emergencia de la creación
(iv) perspectiva *global*: balance del vaivén de cortes y continuidades en el desarrollo del pensamiento matemático.

Los semestres se encadenarán en un todo (*Seminario Continuo*), pero será también posible asistir a cada semestre por separado, pues el material tenderá a ser autocontenido.

Semestre	2012-I	2012-II	2013-I	2013-II	2014-I	2014-II	2015-I	2015-II	2016-I
Obra (A)	**Galois**	**Riemann**	**Poincaré**	**Cantor**	**Hilbert**	**Gödel**	**Grothendieck (1)**	**Grothendieck (2)**	**Grothendieck (3)**

Semestre	2016-II	2017-I	2017-II	2018-I	2018-II
Tema (B)	**Lo Múltiple y lo Uno**	**Lo Discreto y lo Continuo**	**Lo Negativo y lo Positivo**	**Lo Local y lo Global**	**Tipología creativa final**

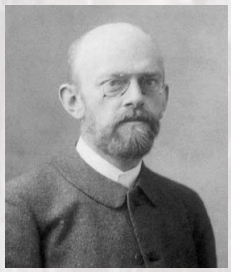
Coordinador: Fernando Zalamea – Of. 405-327
www.docentes.unal.edu.co/fzalameat/
fernandozalamea@gmail.com

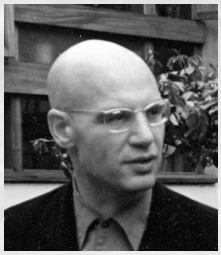
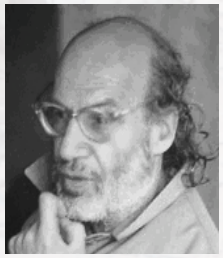
EPISTEMOLOGÍA E HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS
SEMINARIO CONTINUO DE FILOSOFÍA DE LAS MATEMÁTICAS

semestre	*autor*	*páginas*
2012-I	**GALOIS**	1-24
2012-II	**RIEMANN**	25-51
2013-I	**POINCARÉ**	52-74
2013-II	**CANTOR**	75-94
2014-I	**HILBERT**	95-116
2014-II	**GÖDEL**	117-138
2015-I 2015-II 2016-I	**GROTHENDIECK**	139-206





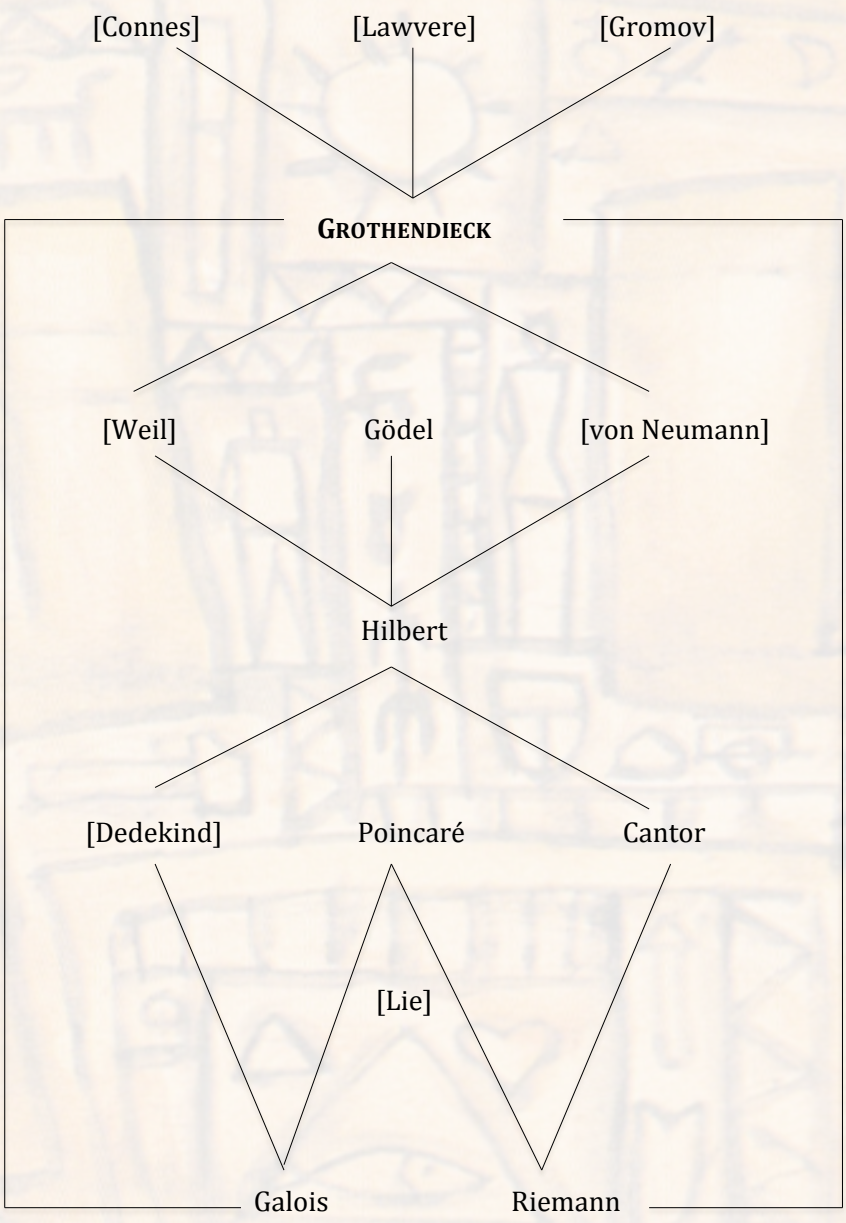


UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA – SEDE BOGOTÁ – DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

SEMINARIO CONTINUO DE FILOSOFÍA DE LAS MATEMÁTICAS
2012-2018

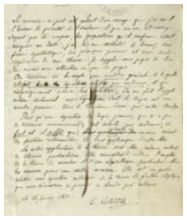
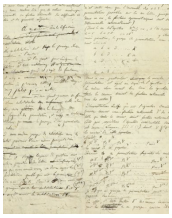
ALGUNOS MAESTROS MAYORES DE LA MATEMÁTICA MODERNA Y CONTEMPORÁNEA
(sin paréntesis [ ], matemáticos estudiados semestre por semestre en el Seminario)



EPISTEMOLOGÍA E HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS
SEMINARIO CONTINUO DE FILOSOFÍA DE LAS MATEMÁTICAS
2012-I - SALÓN 404-212

GALOIS




"El más preciado libro de un sabio será aquel donde diga todo lo que no sabe (...)" (Galois, 1831)
"Mis principales meditaciones se dirigían (...) a la teoría de la ambigüedad (...)" (Galois, 1832)

1	*(22 feb).*	*Mapa del seminario: el revolucionario, el vidente, el ícono.*
2	*(24 & 29 feb).*	*Ecuaciones algebraicas: grandes problemas y conceptos.*
3	*(2 & 7 mar).*	*Integrales abelianas: grandes problemas y conceptos.*
4	*(9 & 14 mar).*	*1830: el entorno filosófico.*
5	*(23 & 28 mar).*	*1830: el entorno técnico y biográfico.*
6	*(13 & 18 abr).*	*Primera Memoria: sobre resolubilidad de ecuaciones por radicales.*
7	*(20 & 25 abr).*	*Artículo "Sobre la teoría de números" – Segunda Memoria.*
8	*(4 & 9 may).*	*Los manuscritos sobre integrales elípticas.*
9	*(11 & 16 may).*	*Los manuscritos metodológicos.*
10	*(18 & 23 may).*	*La carta testamentaria a Auguste Chevalier.*
11	*(25 may).*	*La imaginería de Galois.*
12	*(1 jun).*	*Tabla de la creatividad en Galois.*

	viernes	miércoles
14.00-16.00	presentación del coordinador	complementación y discusión subsiguientes

Evaluación.
Cada estudiante inscrito al **curso** *Epistemología e historia de las matemáticas* deberá proponer, a mediados de semestre, el tema de un ensayo escrito (E), que desarrollará en la segunda mitad del semestre, y obtendrá también una nota de participación (P), asociada a las presentaciones complementarias de los días miércoles. La nota final del curso se obtendrá mediante la fórmula 0.3P + 0.7E.

Bibliografía.
Évariste Galois, *Manuscrits* (Ms 2108), Bibliothèque, Institut de France (disponibles en red).
Évariste Galois, *Écrits et mémoires mathématiques* (ed. Bourgne, Azra), París: Jacques Gabay, 1997.
Évariste Galois, *The Mathematical Writings of Évariste Galois* (ed. Neumann), London: European Mathematical Society, 2011.

Fernando Zalamea - Oficina: 405-327 - Tel. (oficina): 3165000-13214
Mail: fernandozalamea@gmail.com - Web: www.docentes.unal.edu.co/fzalameat/

SEMINARIO CONTINUO DE FILOSOFÍA DE LAS MATEMÁTICAS
2012-I – GALOIS

Febrero 24
Ecuaciones algebraicas: grandes conceptos y problemas

---

(1) sintaxis

términos: cadenas polinomiales $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$

incógnita (x, número "variable")

coeficientes (a_i, números "dados")

ecuaciones: igualdades entre términos
reducibles a $c_nx^n + c_{n-1}x^{n-1} + \dots + c_1x + c_0 = 0$
(en caso de que los coeficientes se comporten "bien")

soluciones: raíces (α_i, $1 \leq i \leq n$), "testigos de control"

(2) pragmática

primera instancia: **resolución operatoria de lo dado** (nivel indicial)
(mediante suma, multiplicación, exponenciación e inversos de cada operación)

obstrucciones de resolución (Abel, 1826): ecuaciones de grado ≥5 no solubles en general

---

segunda instancia: **transformación estructural de lo variable** (nivel simbólico)

"TEORÍA DE LA AMBIGÜEDAD": la revolución de Galois (1829-1832)

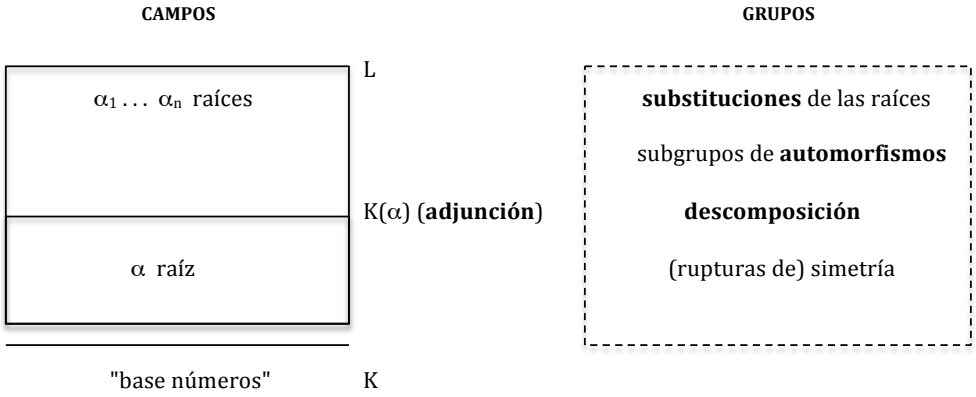
una ecuación dada	múltiples ecuaciones
operatoria cuantitativa	relacionalidad cualitativa
raíces aisladas	raíces en su conjunto
resuelto	soluble
actual	potencial
positivo	negativo
determinado	transformable
aislado	mediado
singular	estructurado
interior	exterior
simetría	ruptura de simetría

problema central: estudio de la *frontera* entre las polaridades anteriores

***ir y venir dialéctico*: Teoría de Galois**

(3) semántica

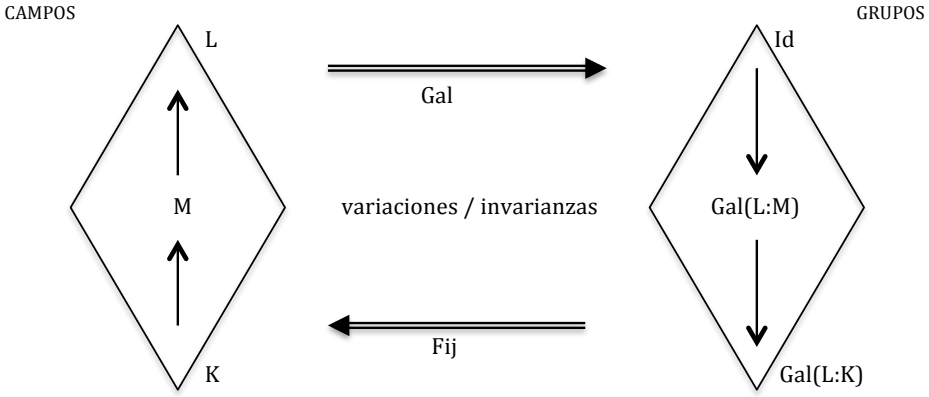
las grandes estructuras y transformaciones descubiertas (¿inventadas?) por Galois



condiciones de (in)solubilidad en el grupo se reflejan en la (in)solubilidad de la ecuación

---

DIALÉCTICA INVERSA DE TRÁNSITOS Y OBSTRUCCIONES



- Jordan, Dedekind, Artin: explicitación de condiciones para que el "ir y venir" sea un isomorfismo –siguiendo la linealización según Artin (1930s): normalidad, separabilidad, finitud–
- Krull: topologización de la situación, en caso de extensiones infinitas (1928)
- Grothendieck: grupos de Galois motívicos (1960s)
- Connes: grupos de Galois universales y grupo de Galois cósmico (2007)

SEMINARIO CONTINUO DE FILOSOFÍA DE LAS MATEMÁTICAS
2012-I – GALOIS

Marzo 2
Integrales abelianas: grandes conceptos y problemas

---

(1) semántica

longitud de arco de una elipse

integrales elípticas: $\int_c^x R(t, \sqrt{P(t)})dt$ R función racional, P polinomio grado 3 o 4

NO expresables mediante funciones elementales (algebraicas, logarítmicas, trigonométricas e inversas)

integrales abelianas: $\int_\gamma R(z, w)dz$ R función racional

correlación polinomial $\phi_n(z)w^n + ... + \phi_1(z)w + \phi_0(z) = 0$
($\phi_i(z)$ funciones racionales, polinomio irreducible;
integrales elípticas: caso particular con $w^2 - P(z)=0$)

NO univalentes (complejas "multivaluadas", dependiendo de la escogencia del camino γ)

(2) pragmática

clasificación de integrales elípticas (tres formas canónicas básicas) (Legendre, 1825)

integrales circulares → funciones trigonométricas (1 periodo)

inversión (Abel, 1827)

integrales elípticas → **funciones elípticas** (2 periodos: real, imaginario)

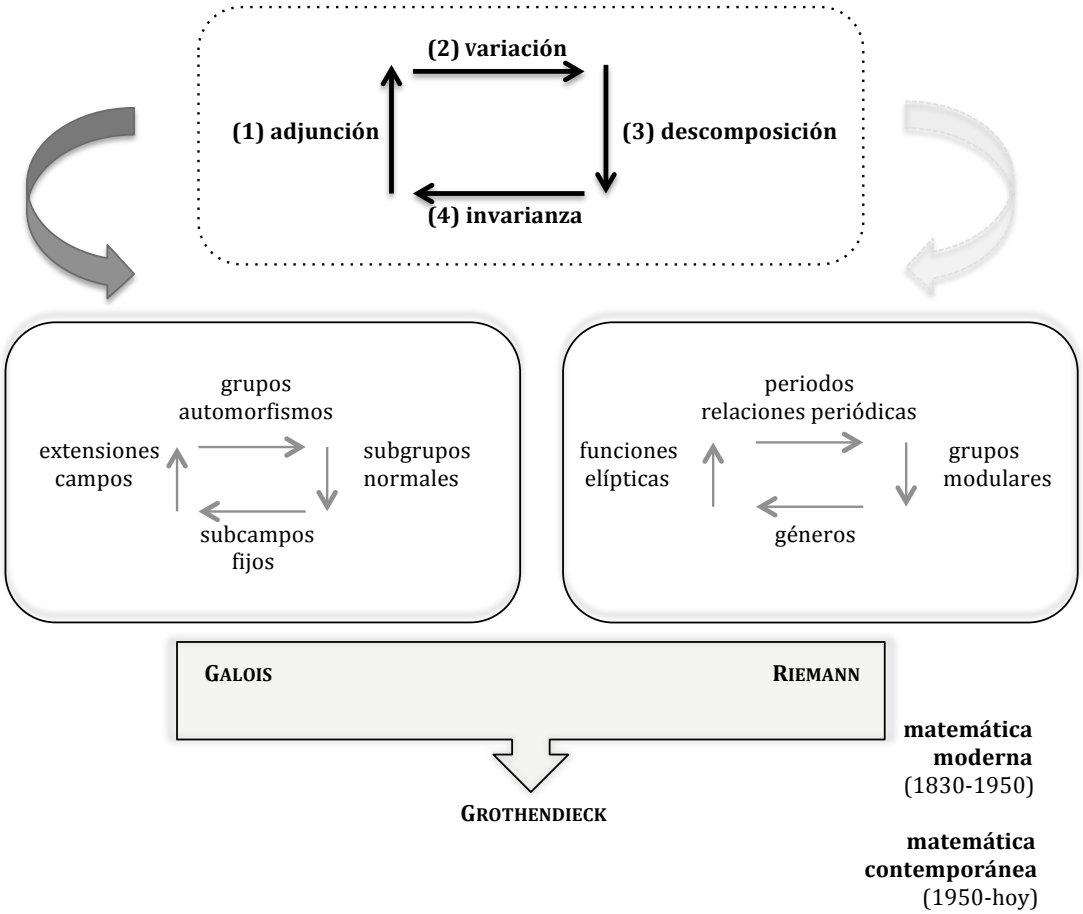
transformación (Jacobi, 1829)

descomposición de las funciones elípticas (Abel, Jacobi) (Galois, 1831-1832):

ecuaciones de división
ecuaciones modulares
grupos modulares
géneros (anticipación del tratamiento geométrico de Riemann, 1851, 1857)

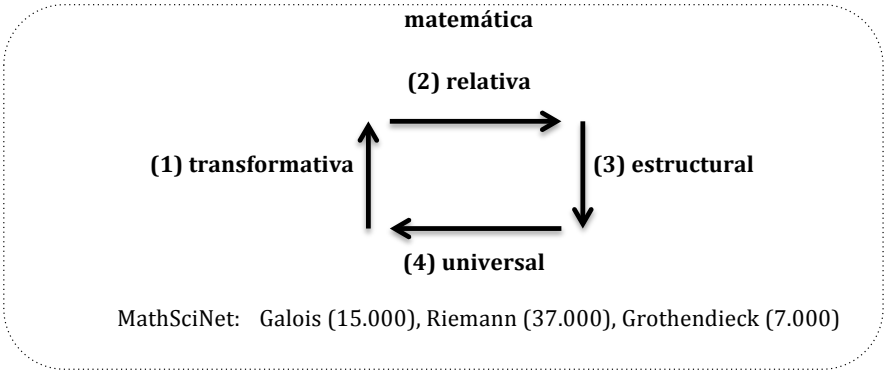
[uso ubicuo de estas ideas, culminando en la prueba del Teorema de Fermat (Wiles, 1995)]

DIALÉCTICAS GALOISIANAS



matemática moderna (1830-1950)

matemática contemporánea (1950-hoy)

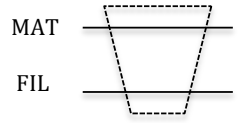


MathSciNet: Galois (15.000), Riemann (37.000), Grothendieck (7.000)

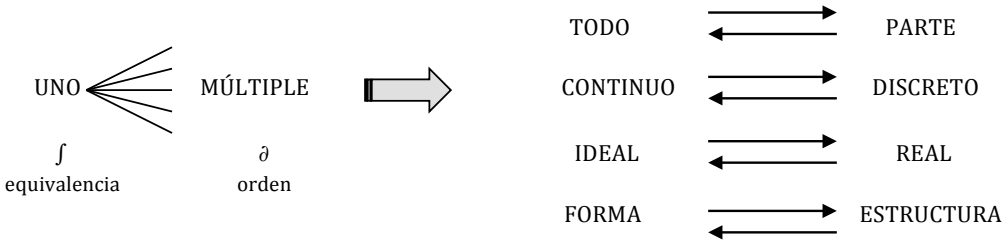
SEMINARIO CONTINUO DE FILOSOFÍA DE LAS MATEMÁTICAS
2012-I – GALOIS

Marzo 9
1830: el entorno filosófico

Excursus general:



ALGUNAS GRANDES DIALÉCTICAS FILOSÓFICAS SUBYACENTES DENTRO DE LAS MATEMÁTICAS



Algunas subdeterminaciones matemáticas *en objetos* (1870-1950):

uno-múltiple interno: teoría conjuntos
uno-múltiple externo: teoría categorías

todo-parte lógica clásica: cuantificadores "extremos" ∀ ∃
todo-parte lógicas alternativas: cuantificadores "medios"
todo-parte geométrico: pasajes global / local (haces)

continuo-discreto clásico: reales "completamiento" de racionales
continuo-discreto no clásico: racionales "secciones" de reales

ideal-real complejo: funciones analíticas, extensiones algebraicas
ideal-real categórico: lema de Yoneda

forma-estructura topológico-algebraica: (co)homología / espacio
forma-estructura homológica: motivos / (co)homologías
forma-estructura topósica: acción de grupo (monoide) / grupo (monoide)

Subdeterminación matemática mayor *en transformaciones* (1960):

autorreferencia: las dialécticas son a su vez matematizadas

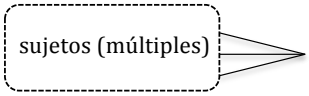
conexiones de Galois entre órdenes
adjunciones entre categorías

Pragmáticas generales en juego: procesos de *ascenso/descenso*, *transformación/invarianza*.

El idealismo alemán (1780-1830)

• KANT

Crítica de la razón pura (1781)

conocimiento 

("giro copernicano")

invariantes: "juicios sintéticos *a priori*" (bajo silogística aristotélica: monadicidad sujeto/predicado)
[desarrollos posteriores: matemáticas = relaciones sintéticas *a posteriori*]

arquitectónica: categorías (cantidad, cualidad, relación, modalidad, etc.) / esquemas (enlaces con intuición)

• FICHTE

Fundamento de una doctrina de la ciencia (1794)

oposición creativa: Yo / No Yo jerarquías (Yo infinito/finito), resistencias (Yo activo y dinámico)

representaciones parciales; procesos de polarización, complementación, saturación, reflexión

• NOVALIS / SCHELLING

Borrador general (1798) / *Sistema del idealismo trascendental* (1800)

unidad de los opuestos (sujeto/objeto, espíritu/naturaleza, ideal/real) ("Todo lo que es, es en sí Uno")

fuerzas dialécticas en permanente devenir

creatividad a través del "lado oscuro" / "mineralogía" del saber

• HEGEL

Ciencia de la lógica (1812)

dialéctica = "movimiento racional superior en el que términos en apariencia separados pasan unos en otros (...) eliminando la hipótesis de su separación"

tesis, antítesis → síntesis

absoluto = "identidad de la identidad y la no identidad"

construcción de mediaciones a partir de contradicciones y antinomias

Galois "filósofo" (1823-1832)

• EL ENTORNO IDEOLÓGICO DIRECTO

- la Escuela: *Lycée Louis-le-Grand* (1823-1829)

(1) las humanidades clásicas (1824-1825): premios en versos latinos y versión griega
(2) el "furor de las matemáticas" (1827-1829):
lecturas directas de Legendre y Lagrange ("metafísica" de las ecuaciones)
primer premio de matemáticas en el *Concours Général* (1827)
primeros dos artículos (fracciones continuas / análisis)
posibles primeras intuiciones de su teoría general

- la Universidad: *École Normale Supèrieure* (1829-1831) (llamada *École Préparatoire* en esos años)

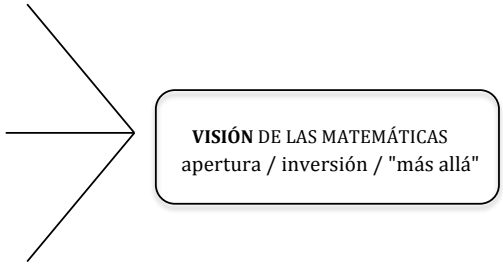
(3) el ambiente libertario
(4) los amigos saint-simonistas

- la Cárcel: *Sainte-Pélagie* (1831-1832)

(5) las defensas legales y la revolución

- el Duelo: la *Glacière* (mayo 1832)

(6) la conciencia de la muerte



• EL MÉTODO: EN EL ESPÍRITU DEL ROMANTICISMO

"[en mis memorias] hay al menos tanto *francés* como álgebra" [72b, 1831]

"[dado] que los esfuerzos de los geómetras más avanzados tienden a la *elegancia*, se puede concluir con certeza que resulta cada vez más necesario *abrazar a la vez* varias operaciones" [72b, 1831]

"Saltar a pie juntillas sobre los cálculos; agrupar las operaciones, clasificarlas según sus *dificultades* y no según sus formas; tal es, para mí, la misión de los geómetras futuros" [73b, 1831]

"Aquí hacemos el *análisis del análisis*: aquí los cálculos más elevados ejecutados hasta el momento son considerados como casos particulares" [73b, 1831]

"En estas dos memorias (...) se encontrará a menudo la fórmula «*no lo sé*». (...) Desafortunadamente, la gente no imagina que el libro de mayor valor del más sabio sería aquel donde diría todo lo que no sabe" [73b, 1831]

"La ciencia es obra del espíritu humano, más destinado a estudiar que a saber, a *buscar* que a encontrar la verdad" [75a, 1832]

"La ciencia progresa mediante una serie de combinaciones donde el *azar* no juega un papel menor, su vida en bruto semeja aquella de los *minerales* que crecen por yuxtaposición" [75a, 1832]

"En vano los analistas querrían disimulárselo: no deducen, sino combinan, *componen* (...) Hay que espiar, *sondear*, solicitar (...) Cuando se llega a la verdad, es chocando de un lado y otro" [75a, 1832]

"Expondremos en algunos artículos lo que hay de *más general*, de *más filosófico*, en investigaciones que mil circunstancias nos han impedido publicar antes. (...) Lo expondremos sobre todo de buena fe, indicando directamente la *vía* que allí nos condujo y los *obstáculos* que nos detuvieron" [74a, 1832]

SEMINARIO CONTINUO DE FILOSOFÍA DE LAS MATEMÁTICAS
2012-I – GALOIS

Marzo 23
1830: el entorno técnico y biográfico

(A) El ambiente matemático y la recepción por Galois

El ambiente matemático:

Lagrange	*Gauss*	*Legendre*	*Cauchy*	*Abel*
Resolución algebraica de las ecuaciones (1771) "el objetivo del álgebra no consiste en encontrar valores de cantidades, sino buscar el *sistema* de operaciones a realizar sobre esas cantidades" "daré los verdaderos principios y, por así decir, la *metafísica* de la resolución de las ecuaciones"	*Investigaciones aritméticas* (1799) (trad. fr. 1807) ecuaciones irreducibles módulo *p* (primo) *adjunciones* de imaginarios "hay que *descomponer* la ecuación *gradualmente* (...) hasta llegar a factores simples, o a las raíces"	*Ensayo sobre la teoría de números* (1808, 2ª ed.) relaciones de *reciprocidad* cuadráticas *sistemas* de ecuaciones *reducción* de integrales elípticas	*Número de valores de una función, dadas ciertas permutaciones (...)* (1815) repartición en *grupos* (partes) permutaciones y substituciones "los valores serán *alterados* por las transposiciones (...) y para obtener valores diferentes, bastará *intercambiar* los índices de un grupo en otro (...)"	*Demostración de la imposibilidad de la resolución algebraica de ecuaciones generales que pasan del grado 4* (1826) lo *general* lo *imposible* la *estructura* *Gran Premio Matemáticas* (1830) *inversión* de integrales elípticas

Galois lector de los Maestros: menciones directas en publicaciones y manuscritos

Lagrange (4)	*Gauss (10)*	*Legendre (4)*	*Cauchy (3)*	*Abel (6)*
[1.294, 299]	[2.271], [4. 428, 431]	[3.413]		
119b, 189b	2b, 6b, 8b, 11a, 37a, 63a, 94a	10b, 63a, 63b	6a, 63a, 83a	3a, 10b, 57a, 59b, 63b, 72a

Las referencias del tipo xyza/b envían a la numeración de los manuscritos.
Las referencias del tipo [x.abc] envían al artículo publicado x (1-5), página abc.

(B) Biografía esquemática de Galois

fecha	vida	obra
1811 (25 oct)	nacimiento en Bourg-la-Reine (afueras París)	
1811-1823	educación bajo su madre en Bourg-la-Reine	
1823 (6 oct)	entra becado a Louis-le-Grand - pensionario interno	
1824	distinción en griego (*Concours Général*, "Troisième")	
1825-1826	rebelde, tumultuoso: repite "Seconde"	
1827 (ene-mar)	"revelación": lee Legendre, Lagrange, Cauchy	
1828	primer premio matemáticas, distinción en griego (*Concours Général*, "Math. Prépa I")	
1827-1828	"Prépa II": concurso Polytechnique y primer fracaso	
1828-1829	"Math. Spéciales": alumno de M. Richard	doce trabajos escolares (para Richard)
1829 (1 abr)	primera publicación	[1] *fracciones continuas* (Ann. Gergonne)
1829 (may- jun)	somete trabajos a la Academia de Ciencias	ecuaciones grado primo (Académie, vía Cauchy, perdidos)
1829 (2 jul)	suicidio del padre de Galois	
1829 (jul)	concurso Polytechnique y segundo fracaso	
1829 (oct)	entra (segundo lugar) a la École Préparatoire (Normale), situada en el Collège du Plessis - amistad con Auguste Chevalier	
1830 (feb)	concursa al "Grand Prix" de la Academia	**resolubilidad de ecuaciones por radicales** (Académie, vía Fourier, perdido)
1830 (abr)	segunda publicación	[2] *resolución algebraica de ecuaciones* (Bull. Ferussac)
1830 (jun)	tercera publicación	[3] *resolución ecuaciones numéricas* (Bull. Ferussac)
1830 (jun)	cuarta publicación	[4] *teoría de números* (Bull. Ferussac)
1830 (jun)	información de la pérdida de su memoria - "Grand Prix" entregado a Abel (post.) y Jacobi	**Discurso Preliminar**
1830 (jul)	jornadas revolucionarias - colegas republicanos	
1830 (dic)	quinta publicación	[5] *notas sobre análisis* (Ann. Gergonne)
1830 (dic)	crisis con el Director de Normale - protesta pública	
1831 (ene)	expulsión de Normale	carta sobre la enseñanza de las ciencias (Gazette des Écoles)
1831 (ene)	abre un curso de matemáticas (Librería Caillot)	
1831 (17 ene)	reescritura y presentación de la memoria perdida	**resolubilidad de ecuaciones por radicales** (Institut, vía Poisson)
1831 (may-jun)	brindis con puñal - proceso - absuelto	
1831 (4 jul)	rechazo (Poisson, Lacroix) de la nueva memoria	
1831 (14 jul)	manifestación a favor de la República - Galois arrestado en primera fila	
1831 (jul)-1832 (mar)	detención en la carcel Sainte-Pélagie - encuentros con Raspail, Blanqui, Nerval, etc.	
1831 (dic)	relectura de su memoria	**Prefacio**
1832 (mar - abr)	traslado a casa de reposo Faultrier - retoma trabajos matemáticos	**manuscritos integrales elípticas**
1832 (14 may)	ruptura amorosa con Stéphanie D.	
1832 (23-29 may)	provocación a un duelo	**carta final a Auguste Chevalier**
1832 (30 may)	duelo en La Glacière - balazo en zona intestinal	
1832 (31 may)	peritonitis (Hospital Cochin) con su hermano - "necesito todo mi coraje para morir a los veinte años"	

Abril 13

Primera memoria: sobre las condiciones de resolubilidad de ecuaciones por radicales

---

(A) Esquema del manuscrito

Mémoire sur les conditions de résolubilité des équations para radicaux
11 páginas: [2a, 2b, 3a, 3b, 4a, 4b, 5a, 5b, 6a, 6b, 7a] (¿escrito 1830?, añadidos 1831-32)

página	*Contenido y Resultados Matemáticos*	*Conceptos Filosóficos y Metodológicos*
2a	Página de presentación. Firmado (añadido, 16 enero 1831) y anotado como "1er Memoire". Afirmación: se presenta una condición necesaria y suficiente (C) para solubilidad de ecuaciones por radicales. Afirmación: en el caso de ecuación irreducible de grado primo, (C) = las raíces son funciones racionales de dos de ellas. Afirmación (añadida): las ecuaciones modulares de las funciones elípticas no son solubles por radicales.	Solubilidad externa (operaciones suma, multiplicación, inversas, raíces) codificada por comportamiento estructural interno (transformaciones de las raíces).
2b	"Principios". Ecuaciones irreducibles. Funciones racionales de los coeficientes. Magnitudes "**adjuntas**". Las dificultades de las ecuaciones son **relativas** a las adjunciones. Caso ecuaciones ciclotómicas. Añadido (proveniente de anotaciones al margen en [3b]): permutaciones, substituciones, "coconjuntos", **clausura de la operación en un grupo** de substituciones, intento (no concluido) de definición de grupo ("~~el grupo es un conjunto de permutaciones tal que si se pasa~~ (...)")	Adjunción. Relativización. Emergencia de la noción de grupo, ligada a pasajes y clausuras.
3a	"Lema I". Raíces de irreducibles y divisibilidad. "Lema II". Dadas *a, b, c,...* raíces distintas de una ecuación, se puede construir *V(a,b,c,...)* con valores siempre distintos para cualquier permutación de las raíces. "Lema III". Dada *V* como en II, **todas** las raíces de la ecuación pueden expresarse racionalmente en función de ***V***. La demostración usa permutaciones y funciones simétricas de las raíces, lema II. ("Esta proposición es citada sin demostración por Abel, en su memoria póstuma sobre las funciones elípticas"). "Lema IV". Considérese un factor irreducible *P* de la ecuación en *V* proveniente de III, con raíces *V, V', V''...* **Invarianza** de las expresiones racionales: si *a=f(V)* es una raíz de *E*, *f(V')* también es raíz de *E*. La demostración usa permutaciones de las raíces, lema I.	Potenciación del no: maximalidad de las distinciones. Inversión: lo múltiple en función de lo uno: raíces expresables (racionalmente) en función de V. Las transformaciones estructurales de lo múltiple están ligadas a la comprensión de lo uno. "Ecuación auxiliar": rol estructural central usado por la inversión en las pruebas [y notable rol calculatorio: Connes 2011].
3b	"Proposición I. Teorema". Dada ecuación *E* con *m* raíces *a, b, c,...* siempre **existe un grupo** de permutaciones de las letras *a, b, c,...* tal que (1) toda función de las raíces, invariante bajo las substituciones del grupo, es racional; (2) toda función racional de las raíces es invariante bajo esas substituciones. "Caso ecuaciones algebraicas": S_m. Caso ecuaciones ciclotómicas: grupo "cíclico", número de permutaciones igual al grado de la ecuación, caso particular de situación general soluble. La demostración usa lemas III-IV, la expresión de las *m* raíces de *E* a partir de *V*, las *n* raíces del factor *P* y propone –combinando los datos anteriores– un grupo de *n* permutaciones de las raíces de *E* con las propiedades deseadas.	Emergencia del Grupo de Galois de una ecuación: movimiento, invarianza, racionalidad. Procesos de uniformización (expresiones de las raíces en función de V), variación (otras raíces asociadas a V), mixión y saturación (ver "mixtos" en Lautman).

4a	Prueba de esas propiedades deseadas. "Llamaremos **grupo de la ecuación** al grupo en cuestión". Escolio. En lo anterior, no importan los nombres que se dan a las letras, sino su estructura ("mismas propiedades"). Notas al margen. ~~Lo que caracteriza un grupo~~. "Proposición II. Teorema". Si se adjunta a una ecuación dada la raíz de una ecuación auxiliar irreducible, (1) sucede una de dos cosas: o bien el grupo de la ecuación no cambia, o bien se reparte en *p* grupos pertenecientes a la ecuación dada cuando se adjuntan cada una de las raíces de la ecuación auxiliar; (2) "esos grupos gozarán de una **propiedad notable**, que se pasará del uno al otro operando sobre todas las permutaciones del primero mediante una misma substitución". Añadido: "Hay algo para completar en esta demostración. *No tengo el tiempo*". (1) Descomposición en factores de la ecuación genera descomposición de las permutaciones en grupos.	Proceso de descomposición de una ecuación. Emergencia de la *idea* de subgrupo normal: pasaje bajo el efecto de una misma substitución.
4b	(2) **Conmutación** de transformaciones racionales de las raíces (tipo *V* y tipo *a*) aseguran los pasajes entre "grupos" vía una substitución. Añadido: "1832. Proposición III. Teorema". Si a una ecuación se adjuntan todas las raíces de la ecuación auxiliar, los grupos mencionados en (2) poseen la propiedad adicional de que "las substituciones son las mismas en cada grupo". "Se encontrará la demostración (...)" "Proposición IV. Teorema". La adjunción del valor de una función de las raíces de una ecuación reduce el grupo de la ecuación a aquellas permutaciones que dejan invariante a la función. "Proposición V. Problema". Solubilidad de una ecuación por radicales.	Emergencia de la *propiedad* de normalidad: estabilidad bajo pasajes. Dialéctica inversa: adjunción raíces / reducción grupo. Problema: muro: obstrucción.
5a	Búsqueda de **condiciones de solubilidad**. Galois propone un "algoritmo" metodológico: (A) Adjúntense progresivamente raíces (primas): después de un número finito de extracciones de raíces, ya sea el grupo disminuye (continúe entonces en B), o, sino, la ecuación no es soluble. (B) Escoja la raíz *p*-ésima de mínimo grado *p* que redujo el grupo. Asuma poseer las raíces de la unidad para asegurar buenos pasajes. Según las proposiciones II y III el grupo de la ecuación se descompone en *p* grupos con las propiedades: (1) pasaje del uno al otro mediante una misma substitución, (2) todos poseen las mismas substituciones. (C) Vale el proceso inverso de (B).	"Metafísica" de las ecuaciones: hondos procesos subyacentes de descomposición.
5b	(D) Considere, en orden, los subgrupos normales maximales ("índices" minimales) que permiten efectuar las descomposiciones. (E) Continúe el proceso hasta llegar al grupo identidad ("un cierto grupo que no poseerá más que una permutación"). Escolio. Caso grado 4. Las ecuaciones se resuelven gracias a una ecuación de grado 3, que exige a su vez la extracción de una raíz cuadrada. "En el orden natural de las ideas", hay que invertir y empezar por esa raíz de grado 2: al adjuntarla a la ecuación de grado cuatro, el grupo de veinticuatro substituciones se descompone en dos, que no contienen (plural en Galois) sino doce. Con la extracción de una raíz de grado 3, el grupo se reduce a cuatro, con otra raíz de grado 2 se reduce a dos, y con otra extracción de grado 2 a la unidad. (La **sucesión de primos 2, 3, 2, 2** determina la solubilidad de la cuártica).	"Canonicidad" de las condiciones de solubilidad.
6a	"Aplicación a las ecuaciones irreducibles de grado primo". "Proposición VI. Lema". Una ecuación irreducible de grado primo no puede reducirse al adjuntar un radical. "Proposición VI. Problema". "¿Cuál es el grupo de una ecuación irreducible de grado *n* primo, soluble por radicales?"	
6b	Condición necesaria y suficiente: que el grupo esté conformado por substituciones de la forma $x_k \; x_{ak+b,}$ con *a, b* constantes.	
7a	"Proposición VIII. Teorema". "Para que una ecuación irreducible de grado primo sea soluble por radicales es necesario y suficiente que, dadas dos raíces, las demás sean deducibles racionalmente de ellas".	Coherencia interna racional.

(B) Los obstáculos, el titubeo, los bordes vagos

Discussions sur les progrès de l'analyse pure [75a] (1832)



Discusiones sobre los progresos del análisis puro

De todos modos [nos asombraremos] si reflexionamos que aquí, como en otros lados, la ciencia es obra ~~del hombre, más hecho para estudiar que para conocer, para buscar que para encontrar la verdad~~ del espíritu humano, más destinado a estudiar que a saber, a buscar que a encontrar la verdad. En efecto, [se concibe que] un espíritu que tuviese potencia para percibir de un solo golpe el conjunto de las verdades Matemáticas [no solo las conocidas, sino todas las posibles], podría también deducirlas regularmente y como maquinalmente de algunos principios [combinados por un método uniforme]; entonces, ~~no más dificultades. No más obstáculos~~ no más obstáculos. No más de esas dificultades que el sabio encuentra en sus exploraciones, y que a menudo son imaginarias. Pero igualmente, no más rol para el científico. No es así: si la tarea del sabio es más pesada y por tanto más bella, ~~el dominio~~ [el camino de la ciencia es a su vez menos regular]. La ciencia progresa mediante una serie de combinaciones donde el azar no juega un papel menor, su vida en bruto semeja aquella de los minerales que crecen por yuxtaposición. Esto se aplica no solo a la ciencia tal cual resulta de los trabajos de una serie de sabios, sino también a las investigaciones particulares de cada uno de ellos. ~~Es en vano que un sabio desea disimularse~~ En vano [los analistas] querrían disimulárselo: no deducen, sino combinan, componen: por más inmaterial que sea, el análisis no está en nuestro poder, como tampoco en el de otros; hay que espiarlo, sondearlo, solicitarlo. Cuando llegan a la verdad, ~~es titubeando~~ es chocando de un lado y otro como lo consiguen.

[obsérvense los tachones, monachos, espirales, nudos y superficies (¿de Riemann?) dibujados por Galois]

La difícil emergencia de la noción de grupo.

Se observa clausura: añadidos en el margen de [3b].
Se asume identidad: "un cierto grupo que no poseerá más que una permutación" [5b].
Se ignoran los inversos, posiblemente por asumirlos en un grupo de substituciones.

Se borra una definición, sin terminar, en el margen de [3b]:
"el grupo es un conjunto de permutaciones tal que si se pasa (...)"
Se anuncia una caracterización, sin terminar, en el margen de [4a]:
"lo que caracteriza un grupo".

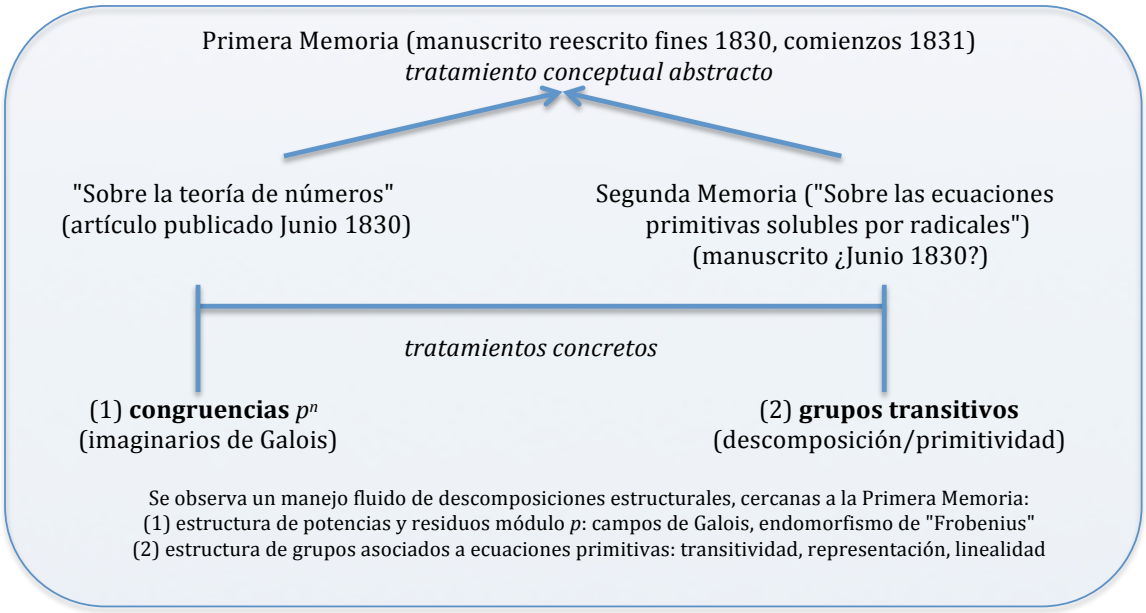
Se confunden un subgrupo y sus "coconjuntos": todos denominados grupos [4a, 4b].
Se indica que un "subgrupo" (H) y sus "coconjuntos" (gH) poseen las "mismas" substituciones (H) [4b].

Se descubren las ideas y propiedades de normalidad, a través de los pasajes y las invarianzas de (sub)grupos bajo una substitución [4a, 4b]. Parece tratarse de un descubrimiento plenamente estructural, sin correlación directa con las congruencias de Gauss.

Abril 27

Hacia un entendimiento complementario de la Primera Memoria:
"Sobre la teoría de números" (Junio 1830) & Segunda Memoria (¿Junio 1830?)

(A) Eventual enlace conceptual



(1) *Sur la théorie des nombres* [8 páginas, 4.428-435]

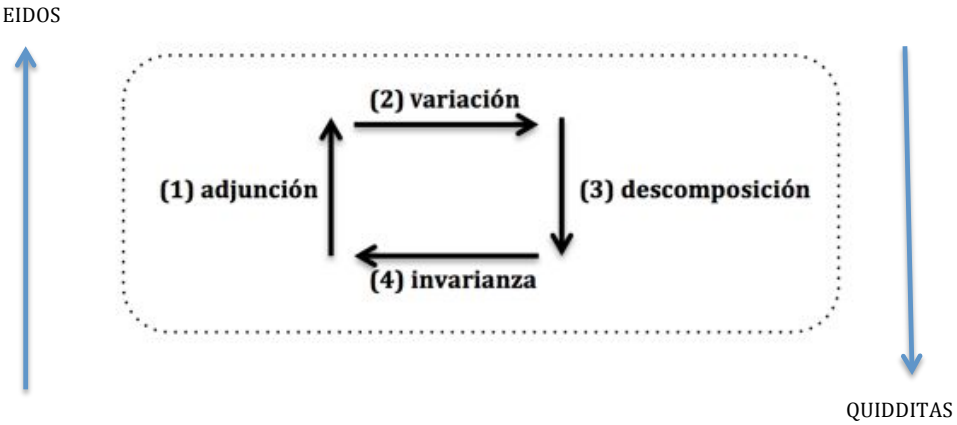
congruencias de Gauss	raíces imaginarias de congruencias	campos de Galois $F(p^n)$	primitividad y descomposición (campos)	caso $F(7^3)$	solubilidad por radicales de ecuaciones primitivas
4.428	4.428	4.428	4.429-431	4.432-433	4.434-435

(2) *Second Mémoire. Des équations primitives qui sont solubles para radicaux* [10 páginas, 37a-41b]

primitividad y descomposición (grupos)	caso p^2 (*p* primo impar): indexaciones, combinatoria	teoremas de representación para Gal ($F(p^2)$) vía grupos lineales de permutaciones	grupo lineal: periodos, reducciones, conjugados
37b-38a	38b-41a	38b-41a	41b

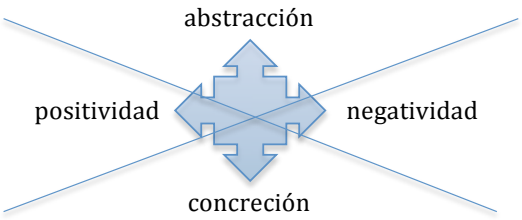
(B) Esquema de fuerzas y tensiones

I. EL ASCENSO Y EL DESCENSO



(1) ascensos a lo ideal (*eidos*): raíces de irreducibles, imaginarios de Galois
(2) variaciones en lo ideal: ecuación auxiliar, grupo de Galois
(3) descensos hacia lo dado (*quidditas*): descomposiciones normales
(4) invarianzas en lo dado: funciones racionales, representaciones lineales

II. LOS COMPLEJOS TRÁNSITOS DIAGONALES



Las solidaridades aritméticas (Cuarto Artículo – luz) y las estructuraciones algebraicas (Segunda Memoria – sombra) involucran todas las direcciones en la anterior *enfangada rosa de los vientos*. Galois enfatiza por vez primera en la historia de la matemática el alcance de la *abstracción pura* y de la *negatividad* (Primera Memoria).

Profunda clarividencia del final de la Segunda Memoria:
el entronque triádico Aritmética-Álgebra-Análisis

Galois: representaciones lineales de grupos aritméticos (caso campos finitos) ligadas a formas modulares

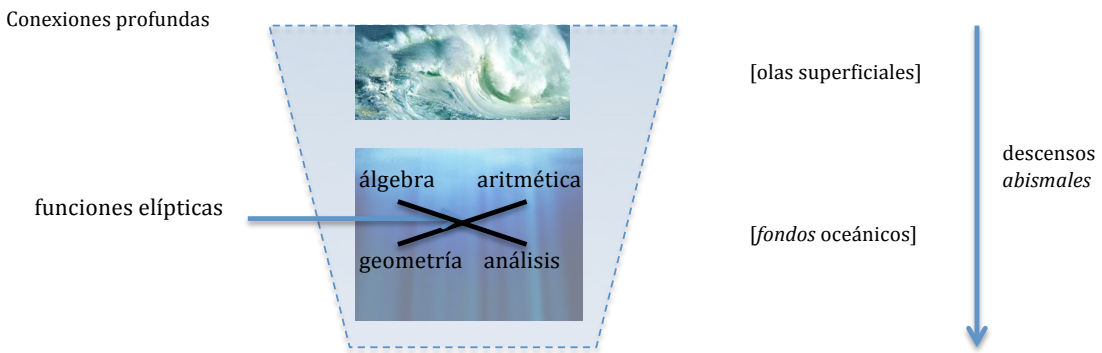
Presagio: Teoría de Cuerpos de Clases (caso abeliano) y Programa de Langlands (caso no abeliano)

Mayo 4

Los manuscritos sobre integrales elípticas

---

texto	fecha	página	tipo referencia	temas
Análisis de una memoria sobre la resolución algebraica de ecuaciones	1830 abril	2.271-272	pista enlace	Excepciones grados 9 y 25: trisección y quintisección de las elípticas. Reducción de ecuaciones modulares
Sobre la teoría de números	1830 junio	4.435	pista enlace	Excepciones grados 9 y 25 en manejo de ecuaciones p^n
Segunda Memoria	¿1830 junio?	41b	pista enlace	Funciones modulares para representaciones de Gal($F(p^2)$)
Primera Memoria (reescrita)	1831 enero	2a (añad)	pista enlace	Mención a aplicaciones relativas a las ecuaciones modulares de funciones elípticas
Memoria sobre la división de una función elíptica de primera clase	¿1831 inicio?	98a-100b	desarrollo parcial	(A)
Vestigios de la cárcel	¿1831 fin 1832 inicio?	119a-185b (no cont)	fragmentos calculatorios	(B)
Teoría de integrales cuyos diferenciales son funciones algebraicas (Tercera Memoria)	¿1831 fin 1832 inicio?	112a	desarrollo parcial	Descomposición de una integral abeliana vía funciones auxiliares de las raíces
Carta a Auguste Chevalier	1832 mayo	9a-11a	visión programática	Ecuaciones modulares de funciones elípticas. Descomposición de integrales elípticas



(A) *Memoria sobre la división de una función elíptica de primera clase* (¿1831 inicio?)
Se trata del manuscrito más limpio de Galois, sin casi tachaduras, ni dudas.

	98a	98b	99b	99a	100b	100a
temas	"azar imprevisto" anuncio: división de funciones elípticas ligada a invariantes de transformaciones lineales mod. p^n	funciones simétricas de las raíces y transformaciones lineales en el caso p^n	factorización y descomposición del conjunto de p^n raíces reducción de la ecuación resolución en caso de conocerse el valor de una función de las raíces invariante bajo transformaciones lineales división de trascendentes en p^n partes	estudio de las ecuaciones $(x)^m=\text{sen}A$ con $()^k$ exponencial elíptica y $m=p^n$ forma de las raíces generales	expresión de las raíces generales a través de funciones racionales y productos de transformaciones lineales (usando leyes modulares de las elípticas) funciones racionales de las raíces invariantes bajo transformaciones "modulares"	descomposición progresiva y algoritmo de resolución de las ecuaciones modulares de las funciones elípticas

(B) *Vestigios concernientes a las funciones elípticas* (Sainte Pélagie: ¿fin 1831-inicio 1832?)
Observaciones diversas: cálculos, formularios, transformaciones, modularidad, grupos.

Se trata del más extenso conjunto de manuscritos de Galois (cerca de 70 páginas): su clasificación, análisis y comprensión constituye la **MAYOR TAREA ABIERTA** en el estudio de la obra de Galois.

Algunos ejemplos de vaivenes, dispersiones, tachones: reflejos crípticos de ideas notables.

	155a	156b	159a	159b
temas	elípticas y grupo modular	"grupo de permutaciones"	p-secciones y transformaciones (p=3,5)	búsqueda de invariantes (¿géneros?)

Observación: la enorme mayoría de *vestigios calculatorios* de Galois se refiere al análisis (cerca de 130 páginas: integrales eulerianas, cálculo integral, funciones elípticas, grupo modular).

Se tienen, en cambio, muy pocos vestigios calculatorios ligados al álgebra o a la teoría de números. Dos hipótesis: (1) éstos últimos fueron destruidos por Galois, o (2) no existieron.

El caso (2) cercano al genio de Galois para *estructurar una alta "teoría de la ambigüedad"* –"saltando por encima de los cálculos" y sin referirse a una colección de ejemplos especiales– sería de gran interés para el entendimiento de las polaridades particular/general, concreto/abstracto, cantidad/cualidad en el pensamiento matemático.

Mayo 11

Los manuscritos metodológicos

(ver también carta testamentaria a Chevalier)

---

texto	fecha	página	temas / citas
"Discurso preliminar"	1830 septiembre (revisitado 1832 abril)	59a 59b	Memoria enviada "hace cerca de siete meses" a la Academia – "material obscuro y aislado" – "novedad" que requiere "nuevas denominaciones, nuevos caracteres" "cálculos impracticables" – "Análisis Algebraico" – "consideraciones Metafísicas que planean sobre todos los cálculos" – "indicar la marcha del análisis y prever sus resultados sin nunca poder efectuarlos"
"Prefacio"	1831 diciembre	72a 72b 73a 73b	Protesta contra dedicatorias – Autonomía contra "estúpidos Zoilos" – Burla de manuscritos que se pierden en los cajones de los Académicos Brevedad – "tanto francés como álgebra" – Burla de cálculos y solemnidades – "Nuestro análisis" – "Poisson no quiso o no pudo comprender" Burla contra los examinadores de la Escuela Politécnica – Pretensión de escribir un "libro de doctrina" – Allende "cerrojos" y "morgue" – "nueva vía que debe seguir el análisis en sus ramas más altas" – "análisis puro" versus aplicaciones "paradójicas" – "lenguaje más breve" desde Euler – "elegancia" – "abrazar varias operaciones a la vez" "Saltar a pies juntillas sobre los cálculos, agrupar las operaciones, clasificarlas según sus dificultades y no según sus formas; tal es, a mi parecer, la misión de los geómetras futuros" – "aquí hacemos el análisis del análisis" – "tendencia de mi espíritu a evitar los cálculos" – "se encontrará a menudo la fórmula «no lo sé»" – "el libro más precioso del más sabio sería aquel donde diría todo lo que no sabe"
Proyecto de publicación	¿1831 fines-1832 inicios?	62a-62b	Primera memoria. Tercera memoria. "Disertación sobre la clasificación de los problemas de Matemáticas..."
"Discusión sobre los progresos del análisis puro"	1832 abril	75a 74a 74b	"Análisis puro", "inmaterial", "lógico", no es "metódico", ni lo "mejor coordinado" – Espíritu humano destinado a estudiar y buscar – "La ciencia progresa por una serie de combinaciones, donde el azar no juega el menor papel, su vida en bruto semeja aquellas de los minerales que crecen por yuxtaposición" – Los analistas "no deducen": "combinan, componen" – "sondeo" del análisis – "verdad chocando de lado y lado" "ideas nuevas que nos condujeron en el estudio del análisis" – se trata aquí "de las ideas ~~metafísicas~~ más abstractas que pueda el hombre concebir" – expondremos "lo más general, lo más filosófico, dentro de investigaciones que mil circunstancias impidieron que se publicaran antes" "sin complicaciones de ejemplos y de aperitivos" – "buena fe, indicando sin vueltas la vía que allí nos condujo, y los obstáculos que nos detuvieron"
Fragmento	1832 abril	80b	Coincidencia, concurrencia de la invención en las "preguntas del momento" "~~Se cree generalmente que las Matemáticas son una serie de deducciones~~"
Catálogo	¿1832 antes del duelo?	58b	Primera memoria ("enero 1830"). Segunda memoria ("junio 1830"). Tercera memoria ("septiembre 1831" – ¿fragmentos perdidos?) Memoria sobre ecuaciones modulares ("febrero 1832" –¿todo perdido?)

Los procesos de la creación ligados a la *Primera Memoria*

nuevo Análisis Algebraico – obscuro, aislado, descoordinado, mineral, sondeado (I)

altas ideas Metafísicas– abstracción, inmaterialidad, vuelo (II)

allende cálculos impracticables – sin complicaciones de ejemplos – lecturas fundacionales

método de conocimiento: doble modelo, a la vez ***romántico*** (I) y ***platónico*** (II)

descenso: hondo análisis (I) y *ascenso*: alta metafísica (II)

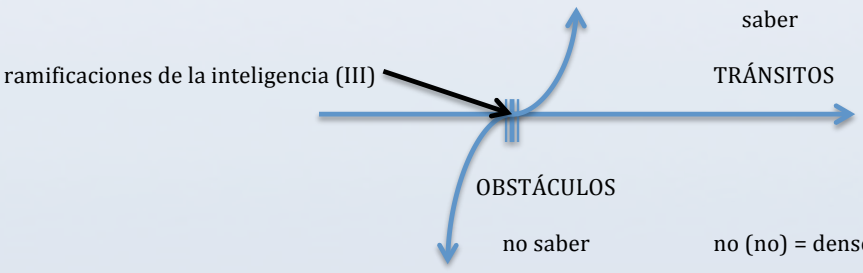
movimientos estructurales puros confirmados por falta de vestigios calculatorios algebraicos

Los procesos de la conciencia ligados a *tránsitos* y *obstáculos*

marcha / vía

brevedad / elegancia

clasificación / combinación



método de conocimiento: doble modelo, a la vez ***riemanniano*** (III) e ***intuicionista*** (IV)

transferencia: cubriente síntesis (III) y *obstaculización*: cubriente pragmática (IV)

Mayo 18

La carta testamentaria a Auguste Chevalier

Las cartas de ruptura de Mlle. Stéphanie [11b] (retazos de cartas reescritas por Galois al final de la carta testamentaria; recubiertas violentamente con tachones de tinta en la última noche).

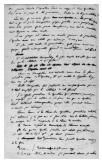


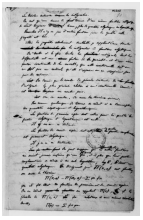
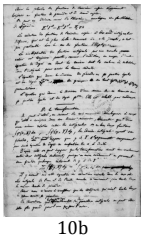
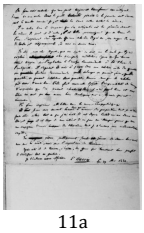
1ª carta: "Rompamos aquí este asunto [affaire] por favor (...) No pensar más en cosas que no podrían existir y que no existirán nunca. ~~Mademoiselle Stephanie D.... 14 mayo 1832~~".

2ª carta: "La verdadera amistad no existe sino entre personas del mismo sexo (...) muy herida (...) me ha visto triste (...) le respondí que tenía penas; que me habían hecho padecer. (...) La calma de mis ideas me deja la libertad de juzgar (...) le agradezco sinceramente a todos aquellos que querrían acogerse a mi favor".

La penúltima carta a Chevalier (25 mayo 1832 - Publicada por vez primera en la "Necrología. Evariste Galois" por Auguste Chevalier, *Revue Encyclopédique* 55 (noviembre 1832), pp. 744-754).
"(...) ¿Cómo consolarse de haber agotado en un mes la más bella fuente de felicidad que esté en el hombre, de haberla agotado sin felicidad, sin esperanza, seguro de haberla secado para la vida? Oh! Vengan después de eso a predicar la paz! (...) Piedad, nunca! Odio, eso es todo. Quien no resiente profundamente ese odio del presente, no posee realmente el amor del porvenir. Aunque la violencia no sea una necesidad en mi convicción, lo sería en mi corazón. No quiero haber sufrido sin vengarme (...) Pero dejemos eso; hay seres destinados tal vez a hacer el bien, pero a sentirlo, nunca. Creo ser de ellos (...) Estoy desencantado de todo, aún del amor de la gloria. ¿Cómo un mundo que detesto podría ensuciarme? (...)"

La carta testamentaria (7 páginas, [8a-11a], "París, 29 mayo 1832" - Publicada por vez primera, bajo los cuidados de Chevalier, en *Revue Encyclopédique* 55 (septiembre 1832), pp. 566-576).

página	citas / temas
 8a	"Mi querido Amigo, He hecho en análisis varias cosas nuevas. Las unas atañen a la teoría de Ecuaciones, las otras a las funciones Integrales. (...) Podrá hacerse con todo eso tres memorias". "La primera está escrita, y a pesar de lo que diga Poisson, la mantengo con las correcciones que he realizado". "La segunda contiene aplicaciones bastante curiosas de la teoría de ecuaciones". "Gran diferencia entre adjuntar a una ecuación una de las raíces de la ecuación auxiliar, o adjuntarlas todas". Descomposición "propia" de un grupo: descomposición normal. Consecuencias para una ecuación.
 8b	Descomposición propia del grupo de una ecuación: *M* grupos de *N* permutaciones. "Si los grupos [obtenidos por descomposiciones propias] poseen cada uno un número primo de permutaciones la ecuación es soluble por radicales. Sino, no". "Como lema a la teoría de ecuaciones primitivas solubles por radicales, coloqué en junio 1830, en el *Boletín* de Ferussac, un análisis sobre los imaginarios de la teoría de números" [campos de Galois]. Representación "lineal" del grupo de Galois de un campo de Galois.

 9a	Representaciones lineales de $Gal(F(p^n):Z_p)$ con $p^n(p^n-1)(p^n-p)...(p^n-p^{n-1})$ parámetros. "La última aplicación de la teoría de ecuaciones se refiere a las ecuaciones modulares de las funciones elípticas". Grupo de división de los periodos. Grupo de una ecuación modular. Forma "canónica" de las variables. Descomposición PROPIA de un grupo modular (vía subgrupo normal con $(p+1)p(p-1)/2$ permutaciones).
 9b	Reducción del grado de ecuaciones modulares: - uso de descomposiciones (impropias) del grupo modular $SL(2,p)$ - manejo de transformaciones de las formas canónicas de las variables - descripción de los subgrupos esperados en caso de reducción del grado. Resolución en los casos p=5,7,11: existencia de subgrupos de índice p. Reducciones aritméticas, ligadas a transformaciones y representaciones de grupos.
 10a	"La tercera memoria se refiere a las integrales [de las funciones algebraicas]". "Se encuentra que el número de periodos distintos de la integral más general relativa a una irracional dada es siempre un número par. Sea $2n$ ese número. Se tendrá el teorema siguiente: Una suma cualquiera de términos se reduce a n términos más algunas cantidades algebraicas y logarítmicas. Las funciones de primera especie son aquellas para las cuales la parte algebraica y logarítmica es nula. Hay n distintas. Las funciones de segunda especie son aquellas cuya parte complementaria es puramente algebraica. Hay n distintas". Presagia teoremas póstumos de Abel y géneros de superficies de Riemann.
 10b	"La ecuación que proporciona la división de los periodos en p partes iguales es de grado $p^{2n}-1$. Su grupo posee en total $(p^{2n}-1)(p^{2n}-p)...(p^{2n}-p^{2n-1})$ permutaciones". "De la transformación". Consideraciones para reducir a un mismo número de periodos las ecuaciones entre integrales abelianas. Modos de uniformización de invariantes.
 11a	"Mis principales meditaciones desde hace algún tiempo se dirigían hacia la aplicación al análisis trascendente de la **teoría de la ambigüedad**. Se trataba de ver a priori, en una relación entre cantidades y funciones trascendentes, **cuáles intercambios podían hacerse, cuáles cantidades podían substituirse a las cantidades dadas sin que la relación pudiese dejar de tener lugar**. Eso permite reconocer de inmediato la imposibilidad de muchas expresiones que se podrían buscar. Pero no tengo el tiempo y mis ideas no están aun bien desarrolladas en ese terreno que es inmenso". "A menudo me he arriesgado en mi vida a afirmar proposiciones de las cuales no estaba seguro. Pero todo lo que acabo de escribir ya lleva casi un año en mi cabeza (...)". "Se encontrarán gentes, espero, que podrán descifrar todo este lío [gâchis]". "Te abrazo con efusión, E. Galois, El 29 Mayo 1832".

LA TEORÍA DE LA AMBIGÜEDAD

Énfasis galoisiano en *estructuras* (campos, extensiones; grupos, descomposiciones normales) y *operaciones* (suma, multiplicación, inversos; adjunción, simetría, racionalidad)

estudiar transformaciones, **invarianzas**, **dualidades**

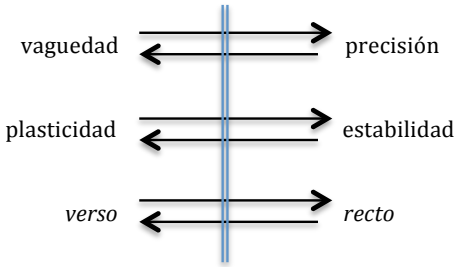
CONVERTIR OBSTRUCCIONES/AMBIGÜEDADES EN OBJETOS MATEMÁTICOS (USUALMENTE GRUPOS)

aprovechar el revés y las dialécticas inversas

- construcción de rupturas de simetría (función auxiliar *V*)
- descomposición siguiendo índices minimales (subgrupos normales maximales)
- elaboración de teoremas de limitación (imposibilidad de resoluciones algebraicas)
- representación lineal de lo aritmético/algebraico/geométrico (grupo modular)

"El gran alcance de la obra de Galois proviene de que su teoría original de ecuaciones algebraicas es una aplicación sistemática de las dos ideas fundamentales de *grupo* y de *invariante*, nociones que tienden a dominar la ciencia matemática" [Lie 1895]

Dialécticas imprescindibles



AMBIGÜEDAD

"Nada es más fecundo, lo saben todos los matemáticos, que esas obscuras analogías, esos reflejos turbios de una teoría en otra, esas caricias furtivas, esas inexplicables contrariedades" [Weil 1960]

La matemática se extiende **mucho más allá** de lo demostrativo, lo tautológico, lo bien ordenado.

El pensamiento matemático requiere también un **denso imaginario: ambigüo, plástico, analógico**.

Más aún, en el momento de la creatividad, esa contraparte "obscura" resulta ser directriz.

Mayo 25
La imaginería de Galois

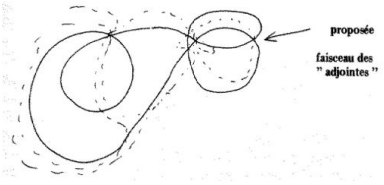


SEMINARIO CONTINUO DE FILOSOFÍA DE LAS MATEMÁTICAS
2012-I – GALOIS

Junio 1
(≈ 180º aniversario de la muerte de Galois)
Ramificaciones de jets abductivos en puntos ciegos
Tabla de la creatividad en Galois

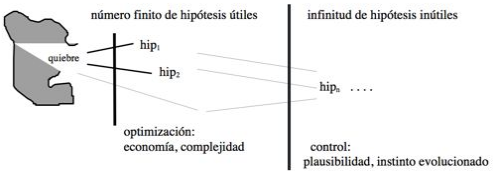
(A) LOS REVESES Y LAS RAMIFICACIONES DE LA CREACIÓN

(1) Puntos ciegos y zonas de penumbra (Châtelet)



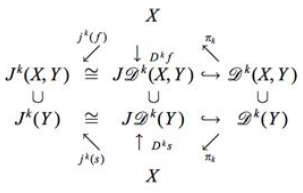
"Se entiende por qué el racionalismo clásico no desea frotarse demasiado con el «misterio» de esas prácticas y esas maneras de ver [figuras, diagramas, problemas, acciones-reacciones, procesos], pues ocurren precisamente **en los puntos sensibles, pero ciegos, del entendimiento, en las bisagras-horizonte donde se despliegan las sistematicidades emergentes**, en todos aquellos lugares donde la orientación no se obtiene fácilmente y donde lo verdadero no se deja asir como lo verificable. (...) Una filosofía a la ofensiva no se contentaría con raciocinios indefinidos sobre el estatuto de los «objetos» científicos. Debe situarse resueltamente **en los puestos avanzados de lo obscuro**, sin considerar a lo «irracional» como diabólico y refractario a la articulación, sino como aquello **que permite el advenimiento de nuevas dimensiones**" [Gilles Châtelet, *Les enjeux du mobile*, 1993, p. 22, nuestros énfasis, nuestro agregado].

(2) Abducción (Peirce)

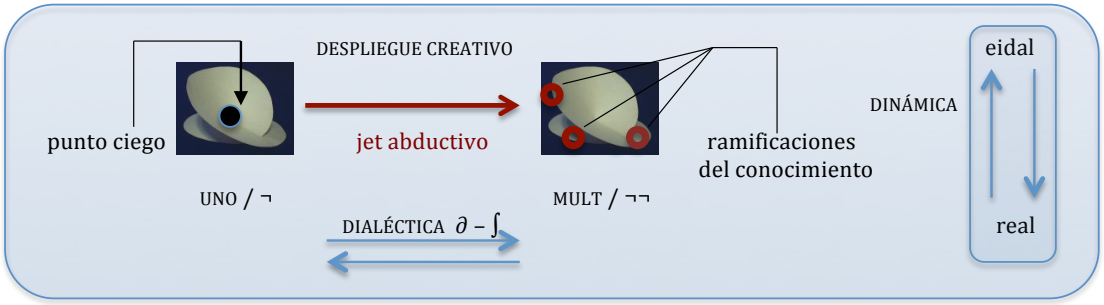


"La abducción es el proceso de formación de hipótesis explicativas. Es la **única operación lógica que introduce una nueva idea**; puesto que la inducción no hace más que determinar un valor, y la deducción simplemente desarrolla las consecuencias necesarias de una pura hipótesis. La deducción prueba que algo *debe ser*; la inducción muestra que algo *actualmente es* operativo; la abducción solo sugiere que algo ***puede ser***" [Charles S. Peirce, *Harvard Lectures* (1903), CP 5.171, nuestros énfasis].

(3) Jets (Ehresmann)



"Desde 1951, me interesé sobre todo en los fundamentos de la geometría diferencial. Definí de una **manera general** los elementos infinitesimales y las **estructuras infinitesimales** que conforman el objeto de la geometría diferencial. La noción fundamental es la de jet de orden *r* de una variedad diferenciable V_n en otra V_m. Es la clase de equivalencia de aplicaciones de clase *r* de V_n en V_m [cuyas derivadas parciales se identifican]. (...) Se define una ley de composición de jets de orden *r*: es la **estructura algebraica que se encuentra en la base de toda la geometría diferencial**" [Charles Ehresmann, "Notice sur les travaux scientifiques", 1955, pp. 16-17, nuestros énfasis, nuestro agregado].



(B) TABLA DE LA CREATIVIDAD EN GALOIS

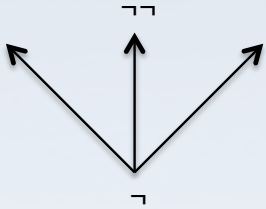


puntos ciegos	jets abductivos	ramificaciones del saber
(I) Emergencia del Grupo de Galois		
ruptura de simetría	función V	múltiples raíces vía unidad V
indiscernibilidad	ecuación auxiliar	substituciones
ambigüedad	invarianza racional	**Grupo de Galois**
(II) Emergencia de las Condiciones de Solubilidad		
singularidad	campo de descomposición	todas las raíces en su conjunto
no conmutatividad	conjugaciones y normalidad	serie de subgrupos normales
división descontrolada	series maximales	**Condiciones Canónicas**
(III) Emergencia de los Campos de Galois		
limitaciones de congruencias	polinomios generadores	imaginarios de Galois
no distribución	extensiones lineales	**Determinación de $F(p^n)$**
(IV) Emergencia de las Representaciones de Grupos (trabajos incompletos)		
aritmética azarosa	modulaciones vía primos	espectros
indexación caótica	transformaciones uniformes	**Representaciones Lineales**
(V) Emergencia del Grupo Modular (trabajos incompletos)		
no seccionabilidad	ecuaciones de división	funciones elípticas
desorden calculatorio	invarianzas geométricas	géneros
no estructura	funciones modulares	**Grupo Modular**

recubrimientos matemáticos intermedios ("mixtos")

estructuras arquetípicas de recubrimiento
campos (clausuras racionales) / grupos (clausuras transformativas)

DENSIDAD – SATURACIÓN – EQUILIBRIO PENDULAR

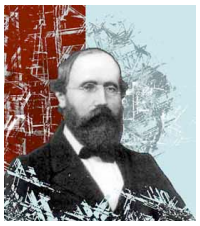
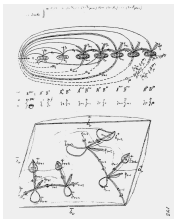
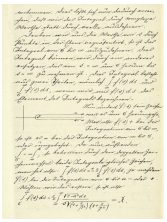
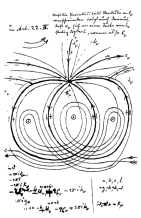


sondeo de lo abismal

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA – SEDE BOGOTÁ – DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

EPISTEMOLOGÍA E HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS
SEMINARIO CONTINUO DE FILOSOFÍA DE LAS MATEMÁTICAS
2012-II - SALÓN 404-212

RIEMANN

"Las masas mentales que entran en el alma se nos aparecen como representaciones o imágenes; sus diversas condiciones internas condicionan la diversidad de sus cualidades." [Riemann, c. 1853]

1	*(1 ago).*	*Mapa del seminario: el mayor geómetra de todos los tiempos.*
2	*(3 & 8 ago).*	*Variable compleja: grandes conceptos y problemas.*
3	*(10 & 15 ago).*	*Fundamentos de la geometría: grandes conceptos y problemas.*
4	*(17 & 22 ago).*	*1850: el entorno filosófico, técnico y biográfico.*
5	*(24 & 29 ago).*	*La tesis doctoral (1851) – (I): superficies de Riemann.*
6	*(31 ago & 5 sep).*	*La tesis doctoral (II): representación conforme y principios minimales.*
7	*(5 & 10 oct).*	*La tesis de habilitación (1854): representaciones por series trigonométricas.*
8	*(12 & 17 oct).*	*Los fragmentos filosóficos (1853-54) y el pensamiento físico.*
9	*(26 & 31 oct).*	*La conferencia de habilitación (1854): los fundamentos de la geometría.*
10	*(16 & 21 nov).*	*Teoría de funciones abelianas (1857).*
11	*(23 nov).*	*La función zeta (1859). Organigrama de la creatividad en Riemann.*

	viernes	miércoles
14.00-16.00	presentación del coordinador	presentaciones de estudiantes y complementos

Evaluación.
Cada estudiante inscrito al **curso** *Epistemología e historia de las matemáticas* deberá proponer, a mediados de semestre, el tema de un ensayo escrito (E), que desarrollará en la segunda mitad del semestre, y obtendrá también una nota de participación (P), asociada a las presentaciones complementarias de los días miércoles. La nota final del curso se obtendrá mediante la fórmula 0.3P + 0.7E.

Bibliografía.

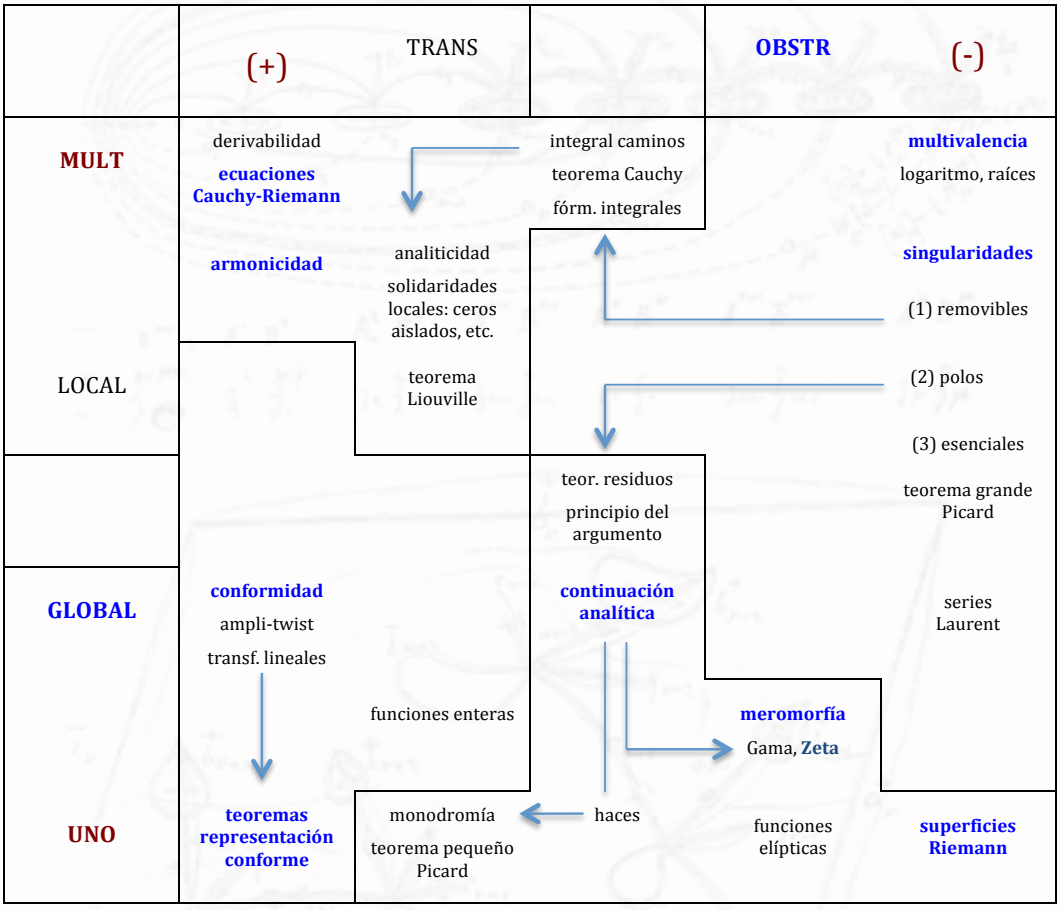
Bernhard Riemann, *Nachlass*, fragmentos disponibles http://gdz.sub.uni-goettingen.de/dms/browsen/.
Bernhard Riemann, *Gesammelte Mathematische Werke*, Berlín: Springer/Teubner, 1990.
Bernhard Riemann, *Collected Papers*, Heber City: Kendrick Press, 2004.
Bernhard Riemann, *Oeuvres mathématiques*, París: Jacques Gabay, 1990.
Bernhard Riemann, *Riemanniana selecta*, Madrid: CSIC, 2000.

Fernando Zalamea - Oficina: 405-327 - Tel. (oficina): 3165000-13214
Mail: fernandozalamea@gmail.com - Web: www.docentes.unal.edu.co/fzalameat/

Agosto 3
Variable compleja: grandes conceptos y problemas

(A) UN ESQUEMA BIDIMENSIONAL ALREDEDOR DE DOS DIALÉCTICAS CENTRALES:
UNO/MÚLTIPLE – TRÁNSITO/OBSTRUCCIÓN

En azul, algunas de las contribuciones mayores de Riemann



Rasgos notables de las funciones (holomorfas/analíticas) de variable compleja:
SOLIDARIDAD ESTRUCTURAL, EQUILIBRIOS TRANS/OBSTR, PEGAMIENTOS LOCAL/GLOBAL

(B) LAS TENSIONES MAYORES EN EL DOMINIO COMPLEJO
Y LOS GIROS CONCEPTUALES DE RIEMANN

EXTENSIÓN DE LO LOCAL INFINITESIMAL A LO GLOBAL GEOMÉTRICO

apuestas de Riemann en el dominio complejo

transferencias plásticas y armónicas FIN → INF
a través de ecuaciones diferenciales parciales (EDP)

control cualitativo del continuo
a través de principios de minimalidad (Dirichlet)

existencia de estructuras globales
a través de continuaciones analíticas en lo local

UNIFORMIZACIÓN DE MULTIPLICIDADES

apuestas de Riemann en el dominio complejo

eliminación de multivalencias singulares
a través de Superficies de Riemann

control cualitativo de las deformaciones complejas
a través de representaciones/uniformizaciones conformes

TRANSFORMACIÓN ESTRUCTURAL DE LO VARIABLE

TEORÍA DE LA "ARMONÍA NEGATIVA": LA REVOLUCIÓN DE RIEMANN (1851-1861)

finito	**infinito**
discreto	**continuo**
fórmula	**concepto**
cálculo	**prueba abstracta**
número	**variable**
cantidad	**cualidad**
acotación	**infinitesimal**
construcción	**especulación**
desorden	**minimalidad**
rigidez	**plasticidad**
local	**global**
lisura	**singularidad**

[Tabla tomada de [Laugwitz 1999], transformada y extendida]

*problema central: estudio de la **frontera (armónica, plástica)** entre las polaridades anteriores*

SEMINARIO CONTINUO DE FILOSOFÍA DE LAS MATEMÁTICAS
2012-I I – RIEMANN

Agosto 10
Fundamentos de la geometría: grandes conceptos y problemas

(A) TENSIONES DEL PENSAMIENTO GEOMÉTRICO

En azul, algunas de las contribuciones mayores de Riemann

Axiomática euclidiana / no euclidiana	**SUPERFICIES** **POSICIÓN / CURVATURA**	**ESPACIO** **ABSTRACTO / MÉTRICO**	Física fluidos /elasticidad

(1) Los espacios deben verse como ***variedades n-dimensionales*** abstractas.
Sólo el añadido de hipótesis adicionales los tornan métricos, euclidianos, etc.
Los ***fundamentos de la geometría*** se encuentran en un análisis abstracto de la noción de variedad, del cual se *derivan* los "axiomas".

(2) La ***geometría de superficies*** se determina por una *perspectiva de* ***posición***, dada por el cuadrado del elemento de línea (diferencial cuadrático ds^2, concepto ***local***), así como por las relaciones de posición, ligadas a dirección y distancia.
El ds^2 se correlaciona a su vez con la ***curvatura*** y con las geodésicas (visión ***global***), las cuales fuerzan la euclidianeidad (o no) del espacio.

(3) Si el espacio físico se entiende como un fluido (lleno de "éter", por ejemplo), las *deformaciones elásticas* de ese fluido deben determinar la física subyacente (manejo de potenciales, unificación de fuerzas). En particular, la ***topología***, entendida como estructura de ***deformaciones plásticas del espacio***, debe subyacer a los fundamentos de la geometría y de la física.

MARCO "IDEAL" (RESOLUCIONES DE NOCIONES POLARES, EN EL SENTIDO DE LAUTMAN)

TOPOLOGÍA (FORMA)	GEOMETRÍA (ESTRUCTURA)
VARIEDAD (ABSTRACCIÓN)	METRIZACIÓN (CONCRECIÓN)
EXTENSIÓN (MINIMALIDAD)	DIFERENCIACIÓN (MAXIMALIDAD)
CURVATURA (LOCALIDAD)	GEODESIA (GLOBALIDAD)



estudio de dialécticas asociadas

(B) **LOS GIROS CONCEPTUALES DE RIEMANN**

EXTENSIÓN DE LO LOCAL INFINITESIMAL A LO GLOBAL GEOMÉTRICO

apuestas de Riemann en el dominio geométrico

determinación de la estructura global de una variedad diferencial
a través de la estructura local de su geometría de posición

entendimiento de lo "real"-físico en su globalidad
a través de localizaciones "ideales" (variedades complejas, métricas, etc.)

UNIFORMIZACIÓN DE MULTIPLICIDADES

apuestas de Riemann en el dominio geométrico

determinación del comportamiento de geodésicas (variaciones no euclidianas)
a través de "arquetipos" uniformes (diferencial cuadrático, curvaturas, etc.)

control cualitativo del continuo (topología)
a través de adecuados invariantes "profundos" (género, etc.)

TEORÍA DEL ESPACIO

multidimensional (infinito)

intrínseco (local)

topologiz*ado* (actual)

metriz*able* (potencial)

Lleva, de manera natural, a entender el infinito actual
a través de su estructura local y sus desarrollos potenciales
(Cantor)

Agosto 17
1850: el entorno técnico, biográfico y filosófico

(A) El entorno técnico

Riemann lector (matemáticas/física) de los Maestros y los Contemporáneos
[referencias (páginas) en *Collected Papers*]

Arquímedes	269	*Galileo*	269, 507
Euclides	257, 268	*Newton*	49, 269, 507, 511, 513
Wallis	77	*Boyle*	145-146, 150, 153, 157, 163
Leibniz	82	*Franklin*	48, 342
Taylor	221	*Coulomb*	44, 47, 340, 349, 351
MacLaurin	187, 189, 361-362	*Gay-Lussac*	145-146
D. Bernoulli	221-223, 256	*Ampère*	350
Euler	1, 74, 77-78, 135, 221-223, 225, 228, 256	*Nobili*	49
D'Alembert	220-223, 225, 256	*Leyden*	43, 46
Laplace	88	*Ohm*	47, 49
Lagrange	103, 223-225, 256, 259	*H. Weber*	47-48, 274, 278, 350
Legendre	257	*Helmholtz*	145, 169, 179
Abel	92, 114, 259, 453	*Kirchoff*	47
Cauchy	95, 101, 226-227, 230, 256	*Clausius*	146
Fourier	95, 101, 162, 196, 219, 224-227, 229, 251, 254, 256, 425	*Kohlrausch*	43, 46, 274, 278, 339, 349, 351
Poisson	146, 150, 153, 162-163, 167, 224	*Faraday*	49
Dirksen	229, 256	*Joule*	146-147
Bessel	229, 256	*Thomson (Kelvin)*	146
GAUSS	4, 39, 44, 57, 61, 73, 77, 79-80, 88, 135, 143, 163, 258, 261, 264, 311, 423	*Beetz*	49-50, 55-56
JACOBI	78, 93, 114, 131, 137, 189, 259, 288, 354, 425, 445-446	*Becquerel*	49-50, 54-55
DIRICHLET	88, 94, 96-97, 104, 112, 133, 135, 171, 173, 179, 182, 187, 196, 198, 202, 224, 226-229, 249, 256, 283, 453	*Regnault*	146-147, 167
Dedekind	171, 183, 189	*Mayer*	146
Weierstrass	93, 131	*Moll*	147
Kummer	57, 77-78	*van Beek*	147
Goldschmidt	143	*Martins*	147, 167
Pfaff	77-78, 259	*Bravais*	147, 167
Du-Bois-Reymond	49-50, 54-56	*Petzval*	167
Stokes	167	*Doppler*	167
Challis	167	*von Ettinghausen*	167
Airy	167	*Busch*	278
		Bradley	278
		Fizeau	278
		Riess	351

(B) El entorno biográfico

fecha	vida	obra
1826 (17 sep)	nacimiento en Breselenz (Hannover)	
1830-1840	educación bajo su padre en Quickborn	
1840-1846	*Gymnasium* (Hannover / Lüneburg) vive donde su maestro Seffer (1844-1846) lectura de Euclides, Newton, Legendre	
1846 (25 abr)	matrícula (filología y teología) en Göttingen	
1847	obtiene permiso del padre para estudiar matemáticas	
1847	desplazamiento a Berlín toma clases con Dirichlet (teoría de números, integración, ecuaciones diferenciales parciales), con Jacobi (mecánica, álgebra) y con Eisenstein (funciones elípticas)	
1849 (mar)	participa en guardia estudiantil, en defensa del Rey	
1849	regreso a Göttingen estudia ciencia y filosofía (Herbart) entra en el Seminario Físico-Matemático bajo H. Weber	
1851 (dic)	entrega y defiende su Tesis Doctoral (bajo Gauss)	***Fundamentos de una teoría general de las funciones de variable compleja***
1853-1854	ayudante de H. Weber	
1854 (jun)	habilitación como *Privatdozent*: Tesis de Habilitación	***Sobre la representación de una función por una serie trigonométrica***
	Conferencia Inaugural	***Las hipótesis sobre las que yace la geometría***
1855	muertes del padre, de una hermana, de Gauss Dirichlet nombrado en Göttingen inicio de su amistad con Dedekind	*primer artículo publicado (física)*
1854-1857	cursos diversos sobre ecuaciones diferenciales parciales, aplicaciones a la física y variable compleja	
1857	primeros dos artículos matemáticos publicados	***Teoría de las funciones abelianas***
	depresiones recurrentes estadías en casa de Dedekind	***Contribuciones a la teoría de las funciones representadas por la serie de Gauss $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$***
1858	muertes de su hermano y otra hermana se hace cargo de las dos hermanas restantes visita de Betti, Brioschi y Casorati a Göttingen	
1859 (may/jul) (ago /dic)	muerte de Dirichlet / Riemann nombrado en su lugar corresponsal de Berlín / miembro Academia Göttingen	***Sobre el número de primos menores que una magnitud dada***
1860 (abr)	visita París	
1861	Concurso Academia París	***Commentatio Mathematica***
1862 (jun)	matrimonio con Elise (amiga de una hermana) sufre una pleurisia, se le diagnostica tuberculosis	*publicaciones (4) sobre física*
1862-1863	primera estadía en Italia (Sicilia) viajes a Nápoles, Roma, Florencia	
1863	segunda estadía en Italia (Pisa) estrecha amistad con Betti	
1865	regreso a Göttingen – malestares	
1866 (20 jul)	tercer viaje a Italia muerte en Selasca (Lago Maggiore)	

(C) El entorno filosófico

Filosofía de la Naturaleza	Filosofía de la Mente	Filosofía Romántica
Leibniz	Lotze	Goethe
Newton	Fechner	**HERBART**

Influencia central de Johann Friedrich Herbart (1776-1841)
(Sucesor de Kant en Königsberg 1809-1833, Profesor en Göttingen 1833-1841)

Sistema de Herbart
(1) *metodología* (control del tránsito entre contradicción fenoménica y unidad – vs. Kant)
(2) *eidolología* (control en el manejo del haz de contradicciones del "Yo" – pro Fichte)
(3) *ontología* (control de categorías genéricas: ser, cualidad, inherencia, cambio)
(4) *sinecología* (control de la generación de espacio, tiempo, número, materia)

Existe constancia [Scholz 1992] de al menos doce páginas manuscritas de Riemann con apuntes sobre Herbart

RIEMANN – "ANTINOMIAS"
(fragmento no fechado, c. 1853?)

"Los sistemas conceptuales de la antítesis son precisamente conceptos determinados mediante *predicados negativos*, pero no son representables positivamente. Precisamente por eso (....) se puede construir un sistema conceptual situado dentro de lo representable que se transforma en el sistema dado por *pura variación de las relaciones de magnitud*."

ARMONÍA NEGATIVA

NEGATIVIDAD (OBS)	**ARMONÍA (TRANS)**
multivocidad	superficies de Riemann
singularidad	continuaciones analíticas
deformación	representaciones conformes
diferencial de curva	geometrías globales
ramificación	géneros
corte discreto	meromorfías continuas

MOTIVO Y VARIACIONES
(FIN / INF)

(D) Influencias mayores en Riemann
• técnicas matemáticas
• tensiones filosóficas subyacentes
(arquetipo/variación, uno/múltiple)

autor	resultado	influencia en Riemann
GAUSS	*Theorema Egregium (1827)* La curvatura de Gauss de una superficie *S*, definida *extrínsecamente* (vía normales a *S*, sumergidas en un espacio mayor *E)* resulta ser un concepto *intrínseco*, sólo dependiente de distancias medidas sobre *S*. (arquetipo) INTRÍNSECO ← EXTRÍNSECO (variación)	*Lección inaugural (1854)*
GAUSS	*Disquisitiones circa seriem infinitam (1813)* Enlaces de la serie general hipergeométrica con funciones naturales específicas (Bessel) de la física. *Relaciones de contigüidad*, expresiones en fracciones continuas, correlaciones con funciones algebraicas. (arquetipo) GRUPO MONODROMÍA ← ECUACIÓN DIFERENCIAL (variación)	*Función hipergeométrica (1857)*
JACOBI	*Fundamenta functionum ellipticorum (1829)* Funciones Teta (ecuaciones funcionales, *representaciones* integrales, bloques para representar elípticas, *transformaciones* modulares, ceros...) (arquetipo) ECUACIÓN FUNCIONAL ← REPRESENTACIÓN (variación)	*Funciones abelianas (1857)* *Función zeta (1859)*
DIRICHLET	*Representaciones por series trigonométricas (1829)* Condiciones (acotación, integrabilidad, número finito de discontinuidades y de extremos) para la *representación* de una función por su serie de Fourier. (arquetipo) CONTROL FINITARIO ← DESARROLLO FOURIER (variación)	*Tesis de habilitación (1854)*
DIRICHLET	*Primos en progresiones aritméticas (1837)* Uso de la variable compleja y de herramientas analíticas en la aritmética. *Introducción de L-series*. Continuación analítica. (arquetipo) FUNCIÓN GENERADORA ← REPARTICIÓN PRIMOS (variación)	*Función zeta (1859)*
DIRICHLET	*Unicidad en Laplacianos ($\Delta u=0$), con frontera (1845-1850)* Determinación de soluciones de ecuaciones diferenciales parciales con condiciones de *frontera*, mediante el estudio global del conjunto de soluciones y *minimización* adecuada en el conjunto. (arquetipo) FORZAMIENTO ($\exists!$) ← CÁLCULO VARIACIONAL (variación)	*Tesis doctoral (1851)*

Igualmente fundamental resultó ser el **ambiente** de Göttingen, mediante **conversaciones informales**
- con Gauss (según Betti, origen de los cortes en superficies de Riemann)
- con Dirichlet (según el propio Riemann, origen del mal llamado "Principio de Dirichlet")
- con Weber (según Klein, origen de la "visión física" de las superficies de Riemann).

Agosto 24
La tesis doctoral – (I) Superficies de Riemann

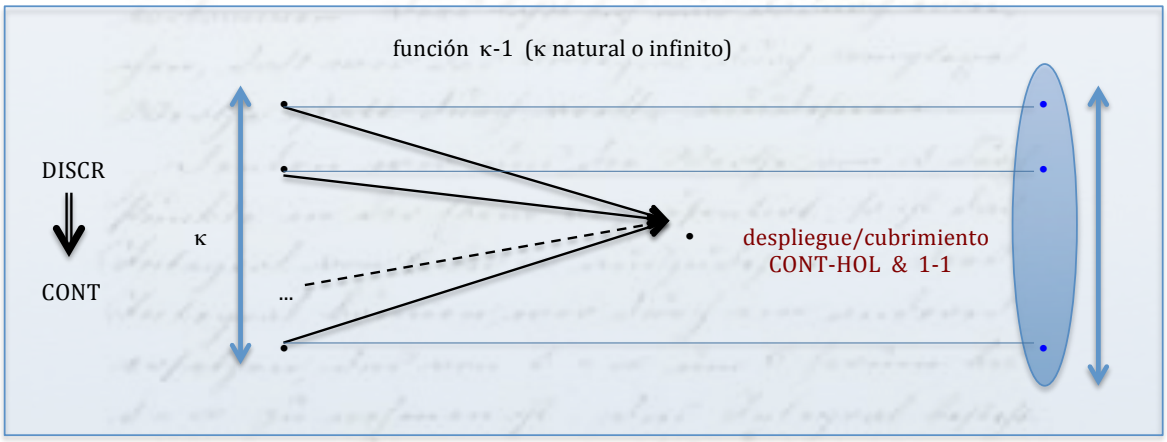
Esquema de la Tesis (1851)
Fundamentos para una teoría general de las funciones de variable compleja

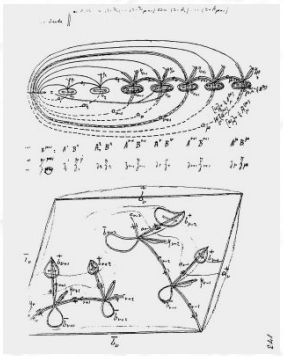
párrafo	*páginas (CP)*	*Contenidos Matemáticos*	*Conceptualización y Metodología*
1	1-2	Definición de función compleja (derivable / holomorfa) vía independencia del camino de derivación	Tránsito Múltiple visto como Uno (nivel infinitesimal)
2	2-3	Representación geométrica de la función como transformación del plano complejo en sí mismo	Visualización del tránsito
3	3-4	Conformidad vía propiedades de correspondencia en triángulos infinitesimales	Invarianzas del tránsito
4	4	Ecuaciones de (Cauchy)-Riemann Armonicidad de partes real e imaginaria ("base investigativa")	Arquetipos del tránsito
5	4-6	**Superficies extendidas** **Hojas, caminos, puntos de ramificación, frontera**	Tránsito Múltiple visto como Uno (niivel local)
6	6-10	Conexidad, simple conexidad, *n*-conexidad Cortes transversales, índice de conectividad	Secciones de lo Uno en lo Múltiple Arquetipos del seccionamiento
7	10-11	Coincidencia de adecuadas integrales de superficie y de contorno (expresión parametrizada, en superficies arbitrarias)	Cohesividad en descensos/ascensos de dimensión
8	11-12	Coincidencia de adecuadas integrales de superficie y de contorno (expresión cerrada, en superficies arbitrarias)	Cohesividad dimensional
9	12-15	Integrales especificas de contorno. Correlaciones con deformaciones, singularidades, caminos, ramificaciones	Tránsitos de lo singular a lo liso (geom)
10	16-19	Caso de las funciones armónicas: expresión vía integrales de contorno, condiciones para deducción de ∞-derivabilidad	Paso Fin (2) → Inf (∞)
11	19-20	Forzamiento de valores de *u* armónica: determinada sobre toda la superficie, si conocida (junto con derivada) en una línea	Cohesividad armónica (forma de continuación analítica)
12	20-22	Retorno a las funciones complejas (holomorfas): condiciones (superficie, función) para deducir ∞-derivabilidad	Cohesividad holomórfica Paso Fin (1) → Inf (∞)
13	22-23	Estudio y expresión de funciones meromorfas vía ponderación (límites) de monomios en la función	Tránsitos de lo singular a lo liso (alg)
14	23-24	Extensión de § 12-13 al caso de superficies arbitrarias y puntos de ramificación (vía ponderación de raíces de monomios)	Suavización de la ramificación
15	24-26	Transformación de superficies en superficies mediante funciones complejas (holomorfas). Inversas holomorfas	Tránsito de lo Múltiple a lo Múltiple
16	26-28	Existencia y unicidad de funciones que minimizan integrales de superficie (luego llamado: "Principio de Dirichlet")	Lo Uno detrás de lo Múltiple
17	28-29	Continuación de la prueba de § 16 (discontinuidades e integrales infinitas)	Enlace negativo Disc / Inf
18	30-32	Determinación de funciones complejas asociadas a condiciones de tipo Dirichlet (borde, punto, variaciones)	Enlace positivo Borde / Superficie
19	32-34	Determinación de funciones complejas *u+iv* en una superficie, dadas *u* en el borde y *v* en un punto; extensión a meromorfas	Cohesividad geométrica Saturación de la información
20	34-36	Funciones complejas: "**emergencia de una armonía escondida**" Programa de usos cualitativos de la variable compleja	*ARMONÍA NEGATIVA*
21	36-39	Teorema de representación conforme para dos superficies simplemente conexas, vía disco + principio de Dirichlet	Cohesividad geométrica Suavización de la transformación
22	39	Problemática (abierta) de la representación conforme para superficies arbitrarias	

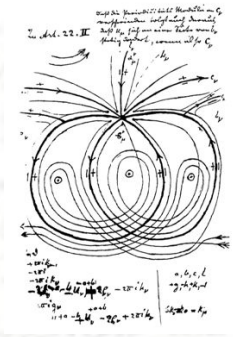
Sombreados en gris: formas explícitas de *ARMONÍA NEGATIVA*

SUPERFICIES DE RIEMANN

(a) imágenes ("masas mentales")





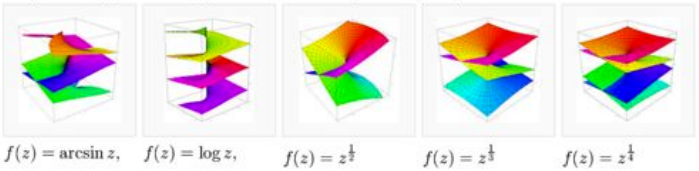


Riemann (Manuscrito)





Brill (Yeso)



Wolfram (Computador)

SUPERFICIES DE RIEMANN
(b) génesis y recepción

I. Génesis.

Manuscrito de la tesis: disponible en el Riemann *Nachlass*, Biblioteca de Göttingen [Ullrich 2005].
¿Existencia de *borradores*?

"Probablemente en la vacación de otoño de 1847 fue cuando Riemann trabajó los principios básicos de sus ideas" [Dedekind 1876].

"La noción de las secciones le vino en mente a Riemann por una definición que le dio Gauss en un coloquio familiar, hablando de otro tema" [Betti 1863] (retomado en [Weil 1979]).

Lecturas de Riemann en la Biblioteca de Göttingen (tarjetas de préstamo en [Neuenschwander 1981]):
- libros de Cauchy (préstamos en 1846/47)
- artículos de Gauss sobre teoría de potenciales (préstamos en 1849/51).

Recuento de Riemann (borrador de carta no fechada, 1855?): "He llamado este método [minimización de potenciales] en honor a Dirichlet, ya que el profesor Dirichlet me ha informado que ha estado usando el método en sus clases desde los comienzos de 1840".

Interpretación de [Klein 1916/17]: eventual influencia del pensamiento físico:
- visualice una superficie T de Riemann, recubierta con estaño, como un conductor eléctrico uniforme
- dados dos puntos A, B sobre T, conéctelos como polos de una pila
- esto genera una corriente determinada por un potencial u, con discontinuidades en A, B
- a partir de u (con $\Delta u=0$), se construye v gracias a las ecuaciones de Cauchy-Riemann: se recorta T mediante $2p$ cortes, y, sobre la superficie transformada (simplemente conexa), se calcula v como integral a lo largo de un corte entre A y B
- de esta manera, dada T, existe única rama $u+iv$, continua excepto en A, B, con u potencial unívoco, v periódica (tránsito cortes)
- las 2 singularidades (integral de tercera especie) se reducen luego a 1 singularidad (segunda especie) y, finalmente, a 0 singularidades (primera especie) ["armonía negativa": $2 \rightarrow 1 \rightarrow 0$]
- "Se advierte así que a cualquier superficie de Riemann de n hojas que se quiera proponer corresponden unas ciertas funciones algebraicas con sus integrales correspondientes; y al construirlas todas sintéticamente se gana una clara visión de su relación mutua".

Problema abierto (tesis doctoral).
La génesis de las superficies de Riemann: estudio técnico, histórico, filosófico.

II. Recepción.

[Gauss 1851]: reporte (muy positivo) de la Tesis.

[Betti 1859]: traducción italiana de la Tesis (*Ann. Matematica Pura ed Applicata*, pp. 288-304, 337-356).

[Casorati 1868]: resumen extenso de la Tesis (*Teorica delle funzioni di variabili complesse*, pp. 118-136).

[Weierstrass 1870]: crítica al Principio de Dirichlet (eventual inexistencia de potenciales mínimos).

[Dedekind & Weber 1876]: primera edición de las *Obras* de Riemann.

[Clifford 1877]: disecciones canónicas de superficies de Riemann.

[Klein 1882]: tratado sobre funciones algebraicas, siguiendo a Riemann.

[Simart 1882], [Hurwitz 1891]: exposiciones sobre superficies de Riemann, siguiendo al autor.

[Osgood 1900], [Hilbert 1904]: pruebas rigurosas del Principio de Dirichlet.

[Weyl 1913]: fundamentación moderna de las superficies de Riemann.

Agosto 31

La tesis doctoral – (II) Inversiones fundamentales y fondos armónicos: disección, representación, suavización, conformización

---

(1) Disección.

Topología (conectividad) de la superficie: tránsitos, circuitos, secciones, piezas [§§5-6; pp. 5-9]

Superficies de Riemann (T)		Funciones (f) sobre las superficies
objetos iniciales arquetipos geométricos (vía tránsitos INTRÍNSECOS)	→ INVERSIÓN FUNDAMENTAL	objetos segundos constructos analíticos (vía descomposición T + composición f)

(2) Representación.

Expresiones integrales de armónicas: consiguientes existencia y derivabilidad [§§10-11; pp. 16-20]

Integrales sobre superficies		Armónicas bien comportadas
objetos iniciales arquetipos geométricos (vía DUALIDADES tipo Green)	→ INVERSIÓN FUNDAMENTAL	objetos segundos constructos analíticos (vía formas de continuación analítica)

(3) Suavización.

Funciones holomorfas sobre T simplemente conexa, a partir de sus armónicas [§12; pp. 20-22]
Funciones meromorfas, a partir de sus fragmentos holomorfos [§13; pp. 22-23]
Funciones meromorfas sobre T arbitraria, a partir de descomposiciones de T [§14; pp. 23-24]

Holo(Mero)morfas sobre superficies		Holo(Mero)morfas bien comportadas
objetos iniciales arquetipos geométricos (vía COHESIVIDADES holomórficas)	→ INVERSIÓN FUNDAMENTAL	objetos segundos constructos analíticos (vía ponderaciones monomiales)

(4) Conformización.

Teorema de representación conforme entre dos regiones simplemente conexas [§21; pp. 36-39]

Estructura de las superficies		Existencia y unicidad de conformidad
objetos iniciales arquetipos geométricos (vía seccionamientos TOPOLÓGICOS)	→ INVERSIÓN FUNDAMENTAL	objetos segundos constructos analíticos (vía minimizaciones de potenciales)

MODELO "ABISMAL"

EXISTENCIA
Transformaciones de la variable compleja

↑

Superficies de Riemann
(características intrínsecas, duales, cohesivas, topológicas)

ESTRUCTURA

Algunos ejemplos locales explícitos de *FONDOS ARMÓNICOS NEGATIVOS*

parágrafo	página	texto	fondo armónico negativo
1	2	$$\frac{du+dvi}{dx+dyi}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)i$$ $$+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)i\right]\frac{dx-dyi}{dx+dyi}$$	Primera ecuación de Riemann: expresión de *dw/dz* mediante invariante + variación(*dz*). Al factorizar y separar la variación negativa, se obtiene la armonía del invariante.
9	13	III. The integral $$\int\left(X\frac{\partial x}{\partial p}+Y\frac{\partial y}{\partial p}\right)ds$$ over the boundary of T is equal to the sum of the integrals $$\int\left(X\frac{\partial x}{\partial p}+Y\frac{\partial y}{\partial p}\right)ds$$ taken around all discontinuities. The contribution to the inte	Consecuencias de representaciones integrales tipo Green [§§7-8]. Integrar la función en la frontera (lisura armónica), equivale a integrarla sobre discontinuidades (singularidad negativa).
10	17	one point of the surface T. Consequently, from Section 9, III with $u'=\log r$, the integral $$\int\left(u\frac{\partial\log r}{\partial p}-\log r\frac{\partial u}{\partial p}\right)ds$$ has the same value for the whole boundary of T as it does for an	Parametrizaciones logarítmicas de armónicas (caso particular del ejemplo anterior). Buscar armónicas sobre la superficie corresponde a encontrar integrandos mixtos, con "arquetipos" logarítmicos negativos.
14	23	To investigate this case, consider the surface T, or an arbitrary piece of it, containing a branch point O' of order $n-1$, where $z=z'=x'+y'i$, and mapped by the function $\zeta=(z-z')^{1/n}$ onto another plane Λ. That is, we represent the value of the function $\zeta=\xi+\eta i$ at the point O as a point Θ of Λ with rectangular coordinates ξ,η, and treat Θ as the image of O. The image of the region T obtained in this way is a connected surface spread over Λ, without a branch point at the image Θ' of O', as we now show.	Reducción de casos con puntos de ramificación a casos sin ramificación. Buscar meromorfas (vía holomorfas, vía armónicas) sobre una superficie ramificada (negativa) corresponde a hacerlo en superficies no ramificadas.
20	34	20. The introduction of complex quantities into mathematics has its origin and immediate purpose in the theory of simple [6] laws of dependence between variables arising from algebraic operations. For if the field of these laws of dependence is extended by permitting the variable quantities to have complex values, a formerly hidden harmony and regularity emerges. The cases where	Variable compleja: "corazón" de las matemáticas. Al introducir la variable compleja, emerge una armonía previamente escondida (negativa).

El "Programa" de Riemann
[§§19-20; pp. 32-36]

§19. *Determinación de funciones de variable compleja.*

A.	Superficie simplemente conexa lisura de u en la frontera, $v(p)$ dada función $u+iv$ continua y finita	⇒	determinación plena de la función
B.	Superficie múltiplemente conexa	⇒	determinación parcial de la función (variaciones alrededor de cortes transversos)
C.	Función discontinua en una línea	⇒	reducción a caso B, tomando la línea como corte
D.	Función infinita en puntos aislados	⇒	suavización vía representación de meromorfas

Se obtiene así una *representación geométrica* de funciones en regiones de superficies de Riemann, vía conocimiento en la frontera, puntos de discontinuidad, familias de curvas conformes [p. 34].

§20. *Introducción ubicua de la variable compleja en matemáticas.*

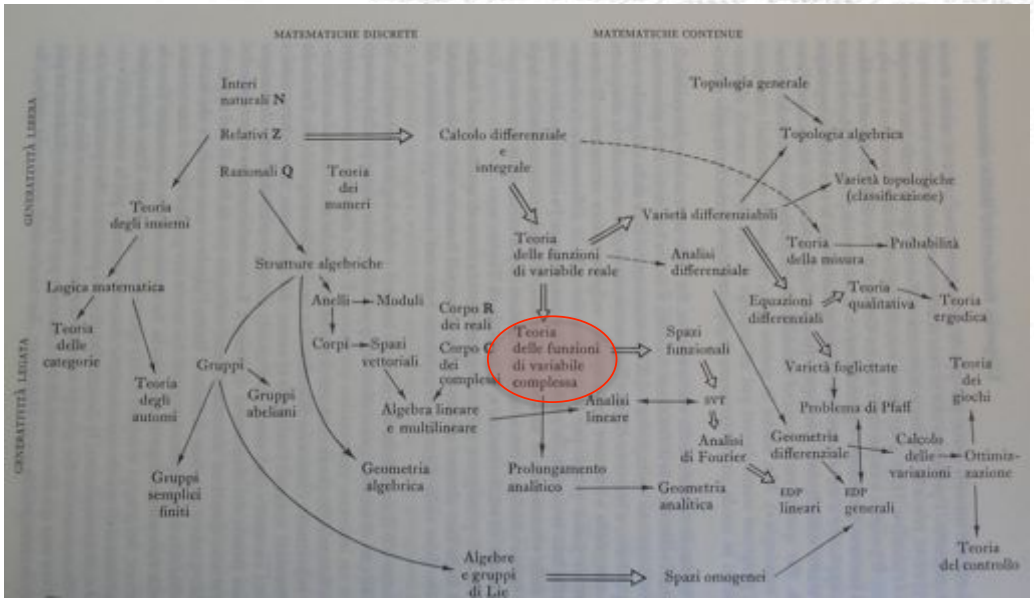
"La introducción de las magnitudes complejas en matemáticas tiene su origen y su propósito inmediato en la teoría de las simples leyes de dependencia entre variables que surgen de las operaciones algebraicas. En efecto, si el campo de esas leyes de dependencia se extiende al permitir que las magnitudes variables tomen valores complejos, **una regularidad y una armonía previamente escondida emergen**" [p. 34].

Ventajas de la Tesis de Riemann, según el autor [p. 35]:
- conocimiento más fino de las igualdades entre funciones complejas (reducción de dominios)
- conocimiento intrínseco (geométrico) de las funciones, previo a sus representaciones (analíticas)
- conocimiento determinante de armónica en la frontera y de discontinuidades en el dominio

---

ARMONÍA NEGATIVA

Diagrama de Thom [1982]



Octubre 5
La tesis de habilitación

Esquema de la Tesis (1854)
Sobre la representabilidad de una función mediante una serie trigonométrica

sección	*páginas (CP)*	*Contenidos Matemáticos*	*Conceptualización y Metodología*
1	219-223	Historia de las cuerdas vibrantes (1747-1761): ecuación diferencial parcial y soluciones: d'Alembert, Euler, Daniel Bernoulli (vía series), Lagrange	Representaciones estructurales: - intrínsecas (ecs. funcionales) -extrínsecas (series)
2	223-226	Historia de la series de Fourier: debates en la Academia de París (1807-1826): Fourier, Poisson, Lagrange, Cauchy	Creación matemática: vaivenes, presupuestos, dogmas: coerción y libertad
3	226-230	Historia de las representaciones vía series de Fourier: teorema de Dirichlet (1829), bajo hipótesis (1) integrabilidad, y (2) existencia de finitos máximos y mínimos	Representaciones integrales: - convergencia absoluta - convergencia integral
4	230	Fundamentos de la integral: **definición de la "integral de Riemann"**	Cubrimiento infinitesimal arbitrario
5	231-232	Caracterización de integrabilidad: variación acotada	Cubrimiento infinitesimal acotado
6	232-234	Estudios de caso de funciones integrables: (1) **función discontinua en infinitos puntos, integrable** (2) función con finitos puntos de infinitud, integrable	Tránsitos allende obstrucciones (series "de la Naturaleza")
7	234-235	Condiciones necesarias (coeficientes) para la representabilidad de una función por series de Fourier	Límites locales de los coeficientes (series arbitrarias)
8	235-242	Serie F asociada a una serie de Fourier Ω: convergencias de transformadas de F (lineales, integrales) de acuerdo con la convergencia de Ω	Representaciones de representaciones: potencia de cubrimientos superiores
9	242-245	Aplicación de la sección anterior: condiciones necesarias y suficientes (sobre doble integral F) para la representabilidad de una función por series de Fourier	Límites globales de las integrales (series arbitrarias)
10	245-246	Representabilidad en el caso de función finita e integrable	Lo particular desde lo general
11	246-248	Condiciones locales extendidas de convergencia, vía deformaciones simétricas de F	Lo puntual desde lo simétrico
12	248-251	**Caso de funciones con finitos máximos y mínimos: condiciones necesarias y suficientes (sobre función f) para la representabilidad de la función**	Lo puntual-particular desde lo simétrico-general
13	251-255	Contraejemplos: - funciones con infinitos máximos y mínimos, no representables - funciones no integrables, representables en infinitos puntos	Estudio de los bordes de las obstrucciones

Sección 8: "corazón" de la *REPRESENTABILIDAD ABSTRACTA*: compárese con las secciones 7-9 de la Tesis Doctoral
Sombreados en gris: formas de *ARMONÍA NEGATIVA*

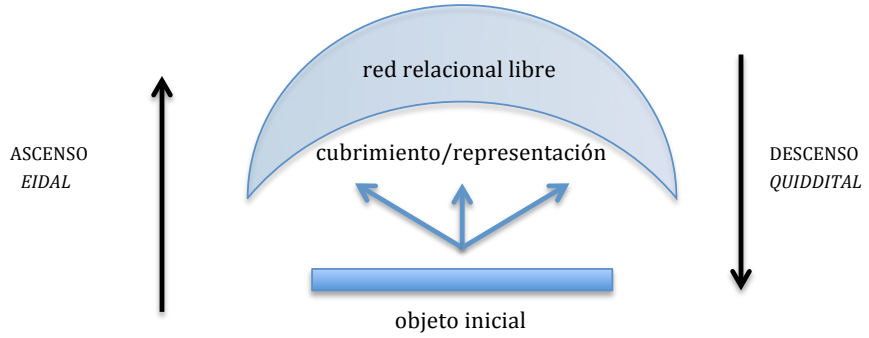
EL "MÉTODO" DE *REPRESENTACIONES ABSTRACTAS* EN RIEMANN
EL FONDO CONCEPTUAL DE LOS TEOREMAS DE REPRESENTACIÓN

cubrimiento de un objeto
representación abstracta, genérica, sin condiciones

Tesis Doctoral (secciones 7-9)	Tesis de Habilitación (sección 8)
tránsitos entre - integral de superficie e integral de línea - integral de contorno e integral interior	tránsitos entre - series de Fourier y series F (doble integr.) - series y transformadas

inclusión progresiva de condiciones adicionales en la representación

(secciones 10-14)	(secciones 9-12)
entendimiento del comportamiento local y global de funciones definidas sobre superficies de Riemann: - armónicas - holomorfas - meromorfas	entendimiento de las representaciones de funciones vía series de Fourier: - finitas e integrables - con finitos máximos y mínimos



El proceso de ASCENSO se encuentra asociado a un proceso de *liberación* de lo particular y de *recomposición* de relaciones dentro de un espacio CUALITATIVO superior. El proceso de DESCENSO asegura, mediante el añadido de diversas condiciones contextuales, una *reencarnación* de lo genérico en lo particular y una emergencia de la *novedad* en el entendimiento CUANTITATIVO del objeto inicial.

Octubre 12
Fragmentos filosóficos, filosofía natural y pensamiento físico

---

(I). Fragmentos no fechados (c. 1852-1854?)

Resumen de ideas de Herbart (*Nachlass*, R. 140; en: Scholz, *Herbart's Influence on Riemann* [1982, p. 418]).

"1. Las presentaciones son las fuerzas elementales del alma. Se oponen y luchan entre sí. Los antagonismos resultantes generan el movimiento del pensamiento. 2. Las imágenes del mundo exterior son generadas por negaciones de percepciones dadas. La negación misma debe ser entendida a partir de la experiencia de cancelación de presentaciones. 3. La negación se cancela y se gana una nueva posición, cuando se consigue una conexión con los recién formados e interdependientes conceptos/imágenes."

Nota (en: Scholz, *Herbart's Influence on Riemann* [1982, p. 414]).

"El autor [Riemann] es Herbartiano en psicología y epistemología (metodología y eidolología); en muchos casos, sin embargo, no puede estar de acuerdo con la filosofía natural de Herbart y con las disciplinas metafísicas (ontología y sinecología) asociadas."

Antinomias (en: Ferreirós, *Riemanniana Selecta* [2000, pp. 96, 98]).

"*Tesis*. Finito, representable. I. Elementos espaciales y temporales finitos. [...] *Antítesis*. Infinito, sistemas conceptuales que se sitúan en las fronteras de lo representable. I. Continuo."

"Los sistemas conceptuales de la antítesis son precisamente conceptos determinados mediante predicados negativos, pero no son representables positivamente. Justamente por eso, porque es imposible una representación precisa y completa de esos sistemas conceptuales, son inaccesibles a la investigación directa y a la elaboración mediante nuestra reflexión. Pero pueden ser considerados como situados en las fronteras de lo representable, es decir, se puede construir un sistema conceptual situado dentro de lo representable que se transforma en el sistema dado por pura variación de las relaciones de magnitud."

Teoría del conocimiento (en: Ferreirós, *Riemanniana Selecta* [2000, pp. 100, 101]).

"I. ¿Cuándo es verdadera nuestra concepción del mundo? «Cuando la conexión entre nuestras representaciones se corresponde con la conexión entre las cosas». Los elementos de nuestra imagen del mundo son totalmente distintos de los correspondientes elementos de lo real representado. Son algo en nosotros; los elementos de lo real algo fuera de nosotros. Pero las conexiones entre los elementos en la imagen y en lo representado deberían coincidir, si es que la imagen ha de ser verdadera."

"II. ¿De qué modo se debe establecer la conexión entre las cosas? «A partir de las conexiones entre las apariencias» [...] Lo que debe servir para conocer la conexión entre las cosas son las relaciones cuantitativas, las relaciones espaciales y temporales entre las cosas sensibles, y las relaciones de intensidad entre sus características, y sus diferencias cualitativas."

Sobre psicología, teleología y almas (en: Ferreirós, *Riemanniana Selecta* [2000, p. 104]).

"Con todo acto simple de pensamiento, algo permanente, sustancial entra en nuestra alma. Este algo sustancial se nos aparece como una unidad, pero parece contener (en tanto expresa o envuelve una extensión espacial y temporal) una variedad interna. Por ello lo llamaré una *masa mental*. – Todo pensar es, según esto, formación de nuevas masas mentales. Las masas mentales que entran en el alma se nos aparecen como representaciones o imágenes; sus diversas condiciones internas condicionan la diversidad de sus cualidades."

(II). *Nuevos principios matemáticos de la filosofía natural* (1853)
(en: Ferreirós, *Riemanniana Selecta* [2000, pp. 114, 115, 117, 118, 126]).

"El objetivo de esta memoria es penetrar en el interior de la Naturaleza, yendo más allá de los fundamentos de la astronomía y la física establecidos por Galilei y Newton."

"Establezco la hipótesis de que el espacio del mundo está lleno de una sustancia que continuamente afluye hacia los átomos ponderables, y allí desaparece del mundo fenoménico (mundo corpóreo). [...] La acción de la gravitación general, que debemos explicar a continuación partiendo de esa hipótesis, queda completamente determinada en cada parte del espacio cuando está dada la función potencial P de todas las masas ponderables para esa parte del espacio [...] Se puede, pues, expresar la acción de la gravitación general sobre un átomo ponderable mediante la presión de la sustancia que llena el espacio en el entorno inmediato del mismo, y se puede pensar que aquella es dependiente de ésta."

"Podemos ahora considerar el momento de fuerzas que tiende a cambiar la forma de la partícula sustancial infinitamente pequeña en O, como resultante de fuerzas que tienden a modificar la longitud de los elementos de línea que terminan en O. [...] La primera parte [de una expresión que represente tal consideración] se debe a la fuerza con la que una partícula sustancial se opone a una variación de volumen sin variación de forma, la segunda a la fuerza con la que un elemento de línea físico se opone a una variación de longitud."

"Las acciones de la materia ponderable sobre la materia ponderable son: (1) Fuerzas de atracción y repulsión inversamente proporcionales al cuadrado de la distancia. (2) Luz y calor radiante. Ambas clases de fenómenos pueden ser explicadas si suponemos que todo el espacio infinito está lleno de una sustancia homogénea, y que cada partícula sustancial sólo actúa inmediatamente sobre su entorno. La ley matemática según la cual esto sucede puede considerarse descompuesta en (1) la resistencia que opone una partícula sustancial a una variación de volumen, y (2) la resistencia que opone un elemento de línea físico a una variación de longitud. En la primera parte se basan la gravitación y la atracción y repulsión electrostática, en la segunda la propagación de luz y calor, y la atracción y repulsión electrodinámica o magnética."

"Estas ecuaciones [diferenciales parciales para movimientos gravitatorios y lumínicos] muestran que el movimiento de un punto sustancial sólo depende de los movimientos en las partes colindantes del espacio y el tiempo, y sus causas (completas) pueden buscarse en las influencias del entorno."

(III). *Mecánica del oído* (1866)
(en: Ferreirós, *Riemanniana Selecta* [2000, pp. 90, 91]).

"Una vez se ha alcanzado una representación que sea suficiente para la explicación del órgano, no debe uno olvidarse de investigar hasta qué punto es *necesaria* para la explicación. Se debe diferenciar cuidadosamente qué presupuestos son necesarios absolutamente [...] y qué formas de representación podrían quizás ser reemplazadas por otras, eliminando además aquello que se haya añadido mentalmente de manera arbitraria."

"En sentido estricto, no es posible ni una investigación puramente sintética, ni una puramente analítica. Pues toda síntesis se basa en el resultado de un análisis precedente, y todo análisis requiere una ulterior síntesis para su confirmación o corrección por la experiencia."

(IV). Entrelazamientos de pensamiento matemático y pensamiento físico.

Recuérdese la interpretación de Klein (Notas de este Seminario, p. 35), según la cual muchas de las intuiciones matemáticas de Riemann (superficies, manejos de potencial, representación conforme) se *originarían* en su visión física: $FIS \rightarrow MAT$. Apoyos factuales:

(1) *Nota de Riemann* (sin fecha, c. 1854?): "Mi **tarea principal** consiste en una nueva interpretación de las leyes bien conocidas de la Naturaleza –su expresión por medio de otros conceptos fundamentales– que tornarían posible la utilización de datos experimentales en la interacción del calor, la luz, el magnetismo y la electricidad para la investigación de sus correlaciones." (en: Laugwitz, *Bernhard Riemann* [1999, p. 255]).

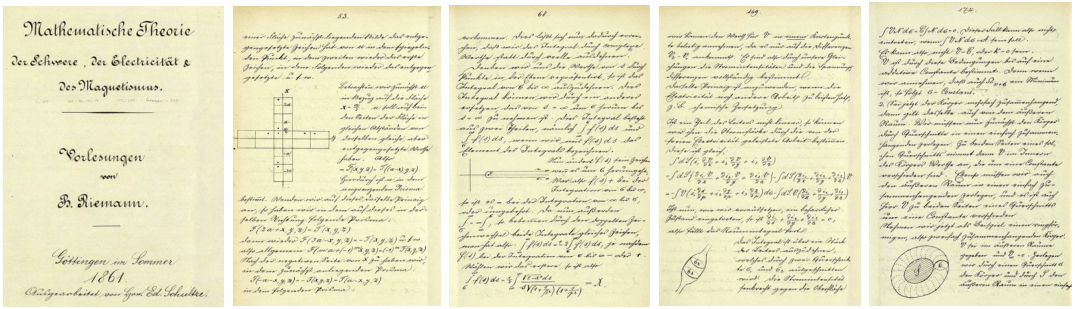
(2) *Testimonio de Dedekind* (en: Laugwitz, *Bernhard Riemann* [1999, p. 288]): "Los primeros gérmenes de sus ideas en filosofía de la ciencia deben haberse desarrollado en ese momento [regreso de Riemann a Göttingen], simultáneamente con su inmersión en estudios filosóficos, ampliamente orientados hacia Herbart".

(3) *Testimonio de Bianchi* en carta a Klein (en: Bottazzini & Tazzioli, *Naturphilosophie and its role in Riemann's mathematics* [1995, p. 10]): "[Betti] puede asegurarle con certeza que una vez Riemann le contó que había sido llevado a su teoría analítica y a sus formas de pensar después de ocuparse de preguntas y problemas de la física".

Equilibrio de la electricidad en cilindros con secciones circulares y ejes paralelos. Representación conforme de figuras acotadas por círculos (sin fecha) (en: *CP*, pp. 429-433).

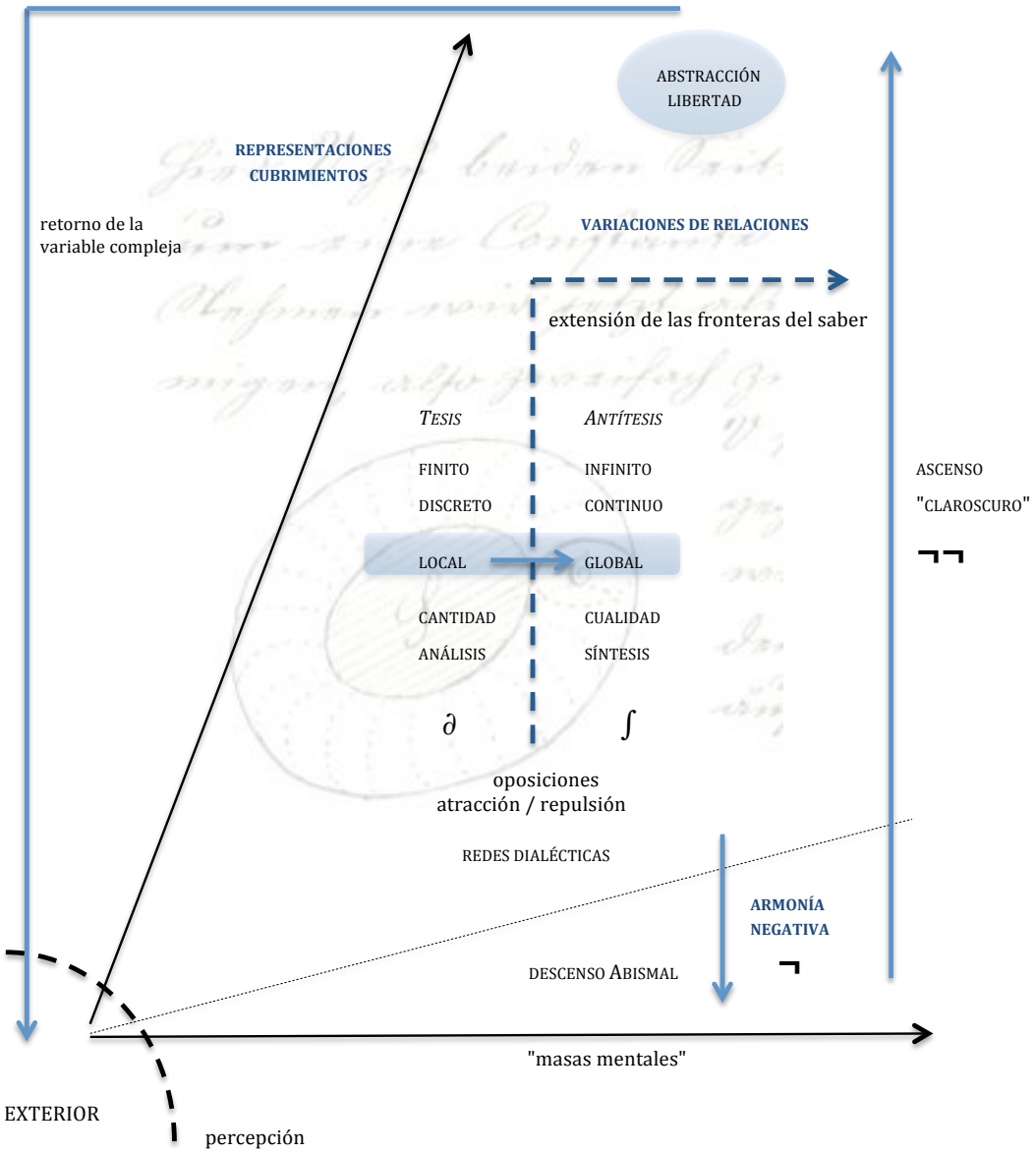
La distribución de *(a)* la electricidad sobre un cilindro infinito con *n* generadores paralelos corresponde a estudiar *(b)* una función armónica definida en una superficie *S* conexa acotada por *n* curvas dadas, con valores dados en la frontera, a su vez reducible a tratar *(c)* una función ζ meromorfa sobre una superficie de Riemann *T* con *n* hojas, imagen conforme de *S*, con *2n-2* puntos de ramificación, que puede ser comprendida mediante *(d)* una imagen especular de *T* y descomposiciones ulteriores (ARMONÍA NEGATIVA).

Cuadernos de cursos de Riemann en Göttingen (1855-1861) (lista completa de 11 cuadernos en: Neuenschwander, *A brief report on a number of recently discovered sets of notes on Riemann's lectures and on the transmission of the Riemann Nachlass* [1988, p. 106]; 4 cuadernos sobre física matemática; 3 sobre funciones de variable compleja en general; 2 sobre funciones elípticas y abelianas; 2 sobre la serie hipergeométrica).



FORMAS DEL PENSAMIENTO EN RIEMANN

"Los sistemas conceptuales de la antítesis [...] pueden ser considerados como situados en las fronteras de lo representable, es decir, se puede construir un sistema conceptual situado dentro de lo representable que se transforma en el sistema dado por pura variación de las relaciones de magnitud".



SEMINARIO CONTINUO DE FILOSOFÍA DE LAS MATEMÁTICAS
2012-II – RIEMANN

Octubre 26
La Lección de Habilitación

Esquema de la *Lección* (1854)
Sobre las hipótesis en que yacen las bases de la geometría

sección	*páginas* *(tr. Clifford 1873)*	*Contenidos Matemáticos*	*Conceptualización y Metodología*
Plan	55-56	"Oscuridad" relacional en las bases de la geometría "Magnitud múltiplemente extendida" (variedad *genérica*) *Hipótesis* adicionales (variedades concretas)	Fondo: **armonía negativa** Más allá del *a priori*: *espacio a posteriori*
I Intr	56	-------	Solicitud de "indulgencia" Únicos predecesores parciales: Gauss, Herbart
I §1	56-58	Variedades discretas y *continuas* Cuantificación de magnitudes y *cualificación de regiones* (caso de las superficies de Riemann)	Lugar de la **"alta matemática"** Abstracción y subdeterminación
I §2	58	Variedades unidimensionales, 2 y 3 dimensionales Pasajes (continuidad puntos)/Pasajes de pasajes (quiebre regional) Variedades (n+1)-dimensionales a partir de n-dimensionales	**Ascenso** (composición de variedades) Fondo: superficies de Riemann
I §3	58-59	Variedades n-dimensionales a partir de (n+1)-dimensionales Posibilidad de variedades ∞-dimensionales (intuiciones de Riemann: análisis funcional, homología...)	**Descenso** (descomposición de variedades)
II Intr	59-60	Relaciones de medida en variedades, vía "nociones abstractas de cantidad" (métrica) y "cálculos expresados geométricamente" (curvatura)	Subdeterminación de lo abstracto Regreso a un "piso sólido"
II §1	60-62	Diferencial de línea (abstracto + condiciones) Diferencial cuadrático general: $ds^2=\sum_{1\le i<j\le n} g_{ij}\,dx_i dx_j$ (en palabras) Plano y espacio: variedades "planas" particulares *versus* "verdaderas variedades del continuo"	De lo intrínseco a lo extrínseco (global) Plano y espacio *a posteriori* bajo hipótesis "planas"
II §2	62-63	Geodésicas (explícito) y espacios tangentes (implícito) Noción general de curvatura (extendiendo Gauss) Homogeneidad de las métricas	De lo intrínseco a lo extrínseco (local) Invarianzas de la curvatura
II §3	64	Deformaciones topológicas de variedades Generalización n-dimensional y topológica del *Theorema Egregium* de Gauss	**Dialéctica interior/exterior** Coincidencia de curvaturas intrínseca y extrínseca
II §4	64-65	Variedades de curvatura constante α (caso particular, "planas") Transformaciones isométricas en tales variedades Expresión general del ds^2 (única fórmula sofisticada de la *Lección*) $\frac{1}{1+\frac{1}{4}\alpha\sum_i x^2}\sqrt{\sum dx^2}$.	Plano y espacio: casos particulares (degenerados, ***a posteriori***) de variedades de curvatura constante
II §5	65-66	Caso de superficies de curvatura constante: positiva / anillo exterior (esfera) – nula / cilindro (plano) negativa / anillo interior (silla de montar)	**Tipología topológica** Reminiscencias del *Tratado de* *Cónicas* de Apolonio
III §1	66-67	Condiciones necesarias y suficientes para determinar las propiedades métricas del espacio: curvatura local nula, curvatura constante, conformidad compleja	**Emergencia natural de la** **variable compleja** en el entendimiento del espacio
III §2	67-68	Estructura diferencial y estructura métrica La euclidianeidad del espacio es un límite inexacto Condición natural del espacio: finito, no acotado	Género y especies Los dos infinitos de Pascal
III §3	68-69	Predilección por infinitesimales, diferenciales, inf. pequeño Intuición de espacios generales tipo Einstein Especificidad de la física de lo infinitamente pequeño Fundamento *a posteriori* del espacio	Infinitamente grande : abismo **Lo local subtiende a lo global** La indagación científica debe luchar contra estrecheces/prejuicios

GÉNESIS

geometría de posición	superficies de Riemann	fundamentos físicos	filosofía geométrica
Gauss	*Tesis Doctoral*	*Nuevos Principios*	Herbart
[Klein 1927]	[Scholz 1982]	[Ferreirós 2006]	[Nowak 1989]

Lección de Habilitación (1854)

RECEPCIÓN

Geometría diferencial y tensores	Fundamento matemático del espacio	Filosofía del espacio
Riemann (1861)	Helmholtz (1868)	
Beltrami (1869) Christoffel (1869) Lipschitz (1869)	Clifford (1873)	
Lie (1875)		Russell (1897)
Ricci (1901) Levi-Civita (1901)	Weyl (1919)	Cassirer (1921)



Ueber
die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen.
Von
B. Riemann.
Aus dem Nachlass des Verfassers mitgetheilt durch R. Dedekind[1]).

Plan der Untersuchung.

Bekanntlich setzt die Geometrie sowohl den Begriff des Raumes, als die ersten Grundbegriffe für die Constructionen im Raume als etwas Gegebenes voraus. Sie giebt von ihnen nur Nominaldefinitionen, während die wesentlichen Bestimmungen in Form von Axiomen auftreten. Das Verhältniss dieser Voraussetzungen bleibt dabei im Dunkeln; man sieht weder ein, ob und in wie weit ihre Verbindung nothwendig, noch a priori, ob sie möglich ist.

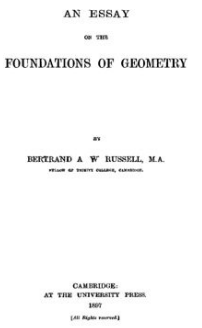
Diese Dunkelheit wurde auch von Euklid bis auf Legendre, um den berühmtesten neueren Bearbeiter der Geometrie zu nennen, weder von den Mathematikern, noch von den Philosophen, welche sich damit beschäftigten, gehoben. Es hatte dies seinen Grund wohl darin, dass der allgemeine Begriff mehrfach ausgedehnter Grössen, unter welchem die Raumgrössen enthalten sind, ganz unbearbeitet blieb. Ich habe mir daher zunächst die Aufgabe gestellt, den Begriff einer mehrfach ausgedehnten Grösse aus allgemeinen Grössenbegriffen zu construiren. Es wird daraus hervorgehen, dass eine mehrfach ausgedehnte Grösse ver-

1) Diese Abhandlung ist am 10. Juni 1854 von dem Verfasser bei dem zum Zweck seiner Habilitation veranstalteten Colloquium mit der philosophischen Facultät zu Göttingen vorgelesen worden. Hieraus erklärt sich die Form der Darstellung, in welcher die analytischen Untersuchungen nur angedeutet werden konnten; in einem besonderen Aufsatze gedenke ich demnächst auf denselben zurückzukommen.
Braunschweig, im Juli 1867. R. Dedekind.



B. Riemann
Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen
Neu herausgegeben und erläutert von
H. Weyl

Berlin
Verlag von Julius Springer
1919



AN ESSAY
ON THE
FOUNDATIONS OF GEOMETRY
BY
BERTRAND A. W. RUSSELL, M.A.
FELLOW OF TRINITY COLLEGE, CAMBRIDGE.

CAMBRIDGE:
AT THE UNIVERSITY PRESS.
1897
[All Rights reserved]

DIAGRAMACIÓN CONCEPTUAL DE FRAGMENTOS DE LA *LECCIÓN DE HABILITACIÓN*

GÉNERO ($\int$ - UNO) : variedad abstracta

ESPECIES (∂ - MÚLTIPLE)

CONTINUO — DISCRETO

VARIEDAD DIFERENCIAL ABSTRACTA — <conjunto / variedad algebraica>

"relaciones regionales" (topológicas/diferenciales)

cirugía general: ascenso sintético / descenso analítico

MÉTRICO

VARIEDAD DIFERENCIAL MÉTRICA

"relaciones de tamaño" (métricas)
elemento de línea general $ds^2 = \sum_{1 \le i < j \le n} g_{ij}\, dx_i dx_j$

DIALÉCTICAS

INTERIOR / EXTERIOR
geodésicas / espacios tangentes

INTRÍNSECO / EXTRÍNSECO
curvatura intrínseca / curvatura extrínseca

LOCAL / GLOBAL
fondo escondido en la *Lección*:
superficies de Riemann, continuación analítica, Riemann-Roch

HACES

curvatura constante
elemento de línea ds^2 sub-general
tipología topológica

curvatura nula (variedades planas)
elemento de línea ds^2 euclideano

plano & espacio
fundamentados a posteriori

- límites inexactos
- determinados bajo hipótesis adicionales
- gobernados de forma natural por la variable compleja

SEMINARIO CONTINUO DE FILOSOFÍA DE LAS MATEMÁTICAS
2012-II – RIEMANN

Noviembre 16
La Teoría de Funciones Abelianas

Esquema del artículo (1857)

sección	*páginas (CP)*	*Contenidos Matemáticos*	*Conceptualización y Metodología*
1	79-81	EDP para definición intrínseca de función holomorfa Funciones univaluadas y multivaluadas - Superficies de Riemann	*Intrínseco y extrínseco* *Uno y múltiple*
2	82-87	Superficies simplemente y múltiplemente conexas Integraciones $\int Xdx+Ydy$ (con $\partial X/\partial y - \partial Y/\partial x = 0$) sobre superficies	*Invarianza topológica* *Escalas y cirugía*
3	87-92	Determinación de funciones por condiciones de frontera y discontinuidades Armonicidad y principio de Dirichlet	*Inversión* *Superficies → Funciones*
4 (Intr)	92-93	Resumen del trabajo - Investigaciones de 1851/52, 1855/56	*Cronología del descubrimiento*
4.1 (I)	94	Funciones algebraicas y superficies de Riemann cerradas (puntos ∞)	*Inversión*
4.2	94-95	Funciones "uniformizadoras" en un punto de ramificación	*Uniformización analítica*
4.3	95-96	Determinación (integral) de funciones vía cortes y periodicidades	*Cirugía*
4.4	96-98	Integrales de primera (hol.), segunda (1 sing. $1/z$) y tercera (2 sings. log) especie	*Representaciones*
4.5	98-100	Dimensionalidad. Desigualdad de Riemann (mitad de "Riemann-Roch")	*Top + VarCom → Alg*
4.6	101-104	Algebraicidad y ramificación: ecuación de invarianza	*Alg → Top + VarCom*
4.7	104-106	Mútiple conexidad y ramificación: ecuación de invarianza	*Género*
4.8	106-107	Representación racional general de integrales de primera y segunda especie	*Parametrización algebraica*
4.9	108-109	Representación racional especial de integrales de primera especie	*Parametrización diferencial*
4.10	109	Representación algebraico-diferencial de integrales de primera especie	*Parametrización topológica*
4.11	109-110	Equivalencia birracional de curvas algebraicas vía superficies de Riemann	*Invarianza genérica*
4.12	111-113	Clases birracionales de curvas algebraicas sobre superficies de Riemann	*Parametrización alg/dif/top*
4.13	113-114	Posibilidades de transformación birracional	*Invarianza particular*
4.14	114-116	Teorema de adición y uso para soluciones completas de sistemas diferenciales	*Armonía plena:* *EDP/Geo/Top/Alg/VarCom*
4.15	116-117	*(cont.)* Congruencias birracionales	
4.16	117-119	*(cont.)* Descripción de las soluciones completas	
4.17 (II)	119-120	Definición de funciones Teta	*Multivariaciones lineales*
4.18	120-121	Representación de funciones Teta vía cirugía de superficies de Riemann	*Homogeneidad*
4.19	121-122	Cirugía ("disección") específica de la superficie	*Simetría general*
4.20	122	Base de integrales sobre la superficie seccionada. Simetría de coeficientes Teta	*Simetría particular*
4.21	123	Integrales de contorno. Condición de convergencia sobre coeficientes Teta	*Armonicidad*
4.22	124-125	Funciones Teta formadas a partir de las descomposiciones anteriores	*Síntesis (1)*
4.23	125-128	Relaciones estructurales de las funciones Teta	*Síntesis (2)*
4.24	128-129	Congruencias y funciones Teta	*Síntesis (3)*
4.25	130-132	Enlace entre funciones Teta e integrales (segunda, tercera especie)	*Multivariación logarítmica*
4.26	132-133	Representación de funciones algebraicas vía cocientes y productos Teta	*Representaciones*
4.27	133-134	Restricciones en una tal representación	*Obstrucción y tránsito*

sombreado: algunos ejemplos profundos de ARMONÍA NEGATIVA

variedad algebraica *C* — Alg

|

superficie de Riemann *TC* asociada a *C* — Geo/Top

|

espacio vectorial *MTC* de funciones meromorfas sobre *TC* — EDP/VarCom

proceso general de cubrimiento (I)

nudo / rosa de los vientos

(RR) "Riemann-Roch":
***dim (MTC)* ligada a invariantes de *C* y *TC* (género)**

Alg

Geo/Top — **RR** — VarCom

EDP

problema
control global de soluciones de sistemas con parámetros locales

HAZ (Cartan, Serre, Hirzebruch) (1950-54) (*un* sistema)

K-teoría (Grothendieck) (1957) (*todos* los sistemas)

K-teoría topológica (Hirzebruch, Atiyah) (1958) (parámetros *continuos*)

TEOREMA DEL ÍNDICE (Atiyah, Singer) (1963) (EDP *elípticas*)

para operadores diferenciales elípticos:
índice = (#soluciones) – (#restricciones) (formalmente, núcleo y conúcleo del operador)
determinado por adecuados invariantes topológicos
(las soluciones y restricciones, inestables por separado, son en cambio estables en su diferencia: forma muy sofisticada de la "armonía negativa" riemanniana).

proceso general de cubrimiento (II)

SEMINARIO CONTINUO DE FILOSOFÍA DE LAS MATEMÁTICAS
2012-II – RIEMANN

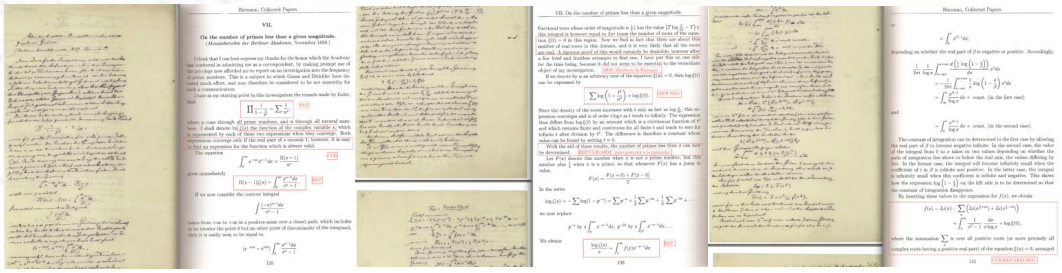
Noviembre 23
La función Zeta
Organigrama de la creatividad en Riemann

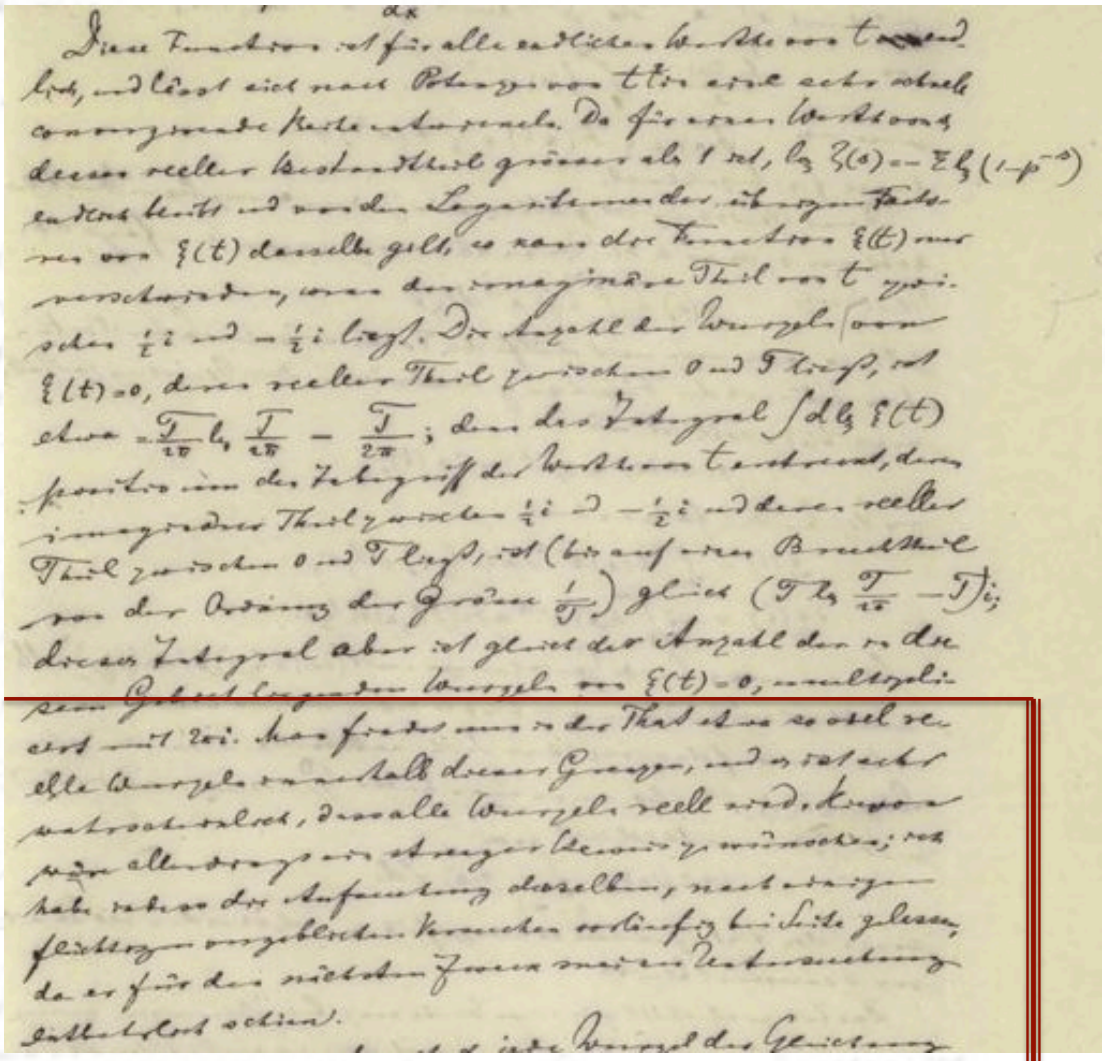
Esquema del artículo (1859)
Sobre el número de primos menores que una magnitud dada

páginas (CP)	*Contenidos Matemáticos*
135	Función Zeta de Euler (para reales > 1). Fórmula de Euler. Función Zeta de Riemann (para complejos con parte real > 1). Expresión parcial de la Función Zeta (vía integral de Euler y función Gama).
136	Expresión general de la Función Zeta $\zeta(s)$ (para todo complejo s, con singularidad en $s=1$). Primera prueba de la ecuación funcional (correlación entre $\zeta(s)$ y $\zeta(1-s)$). Representaciones invariantes.
137	Segunda prueba de la ecuación funcional. Introducción de la función $\xi(t)$ ligada a $\zeta(1/2 + ti)$. Estudio de las raíces de $\xi(t)$ y aproximación de la cantidad de raíces.
138	**Hipótesis de Riemann**: todas las raíces de $\xi(t)$ son reales (*i.e.* todas las raíces de $\zeta(s)$ yacen en la recta $Re(s)=1/2$). Correlación integral entre la Función Zeta y la "suma ponderada" $f(x)$ asociada a $F(x)=$ número de primos menores que x.
139	Inversión armónica (vía transformada de Fourier) de la correlación anterior. Expresión integral de la inversión obtenida (con obstrucciones de convergencia).
140	Representación de $\xi(t)$ (vía raíces, *i.e.* singularidades de $\log\xi(t)$). Eliminación de las obstrucciones en la infinitud, vía técnicas de derivación y reintegración por partes.
141	Resultado principal. **Expresión analítica fina** (vía cinco términos analíticos y *combinatoria de las raíces de* $\xi(t)$) donde se correlacionan $f(x)$, la Función Zeta y las integrales logarítmicas $Li(x)$.
142	Inversiones tipo Möbius entre $f(x)$ y $F(x)$. Densidad de primos. Aproximaciones finas de $F(x)$ mediante "serie ponderada" ligada a $Li(x)$.
143	Ventajas calculatorias de la aproximación riemanniana. Pendularidad, regularidad.

Algunas ***cumbres conceptuales*** de la inventividad riemanniana en el artículo sobre la función Zeta

cubrimientos	continuación analítica geométrica (p. 135); integral inversa de camino (p. 136); aproximación asintótica (p. 137); $f(x)$ como "suma ponderada" de $F(x)$ (p. 139); aproximación riemanniana de $f(x)$ (p. 141)
representaciones	función $\zeta(s)$ (5 ocasiones, pp. 135-137); enlace integral $\zeta(s)$ con $f(x)$ (p. 138); expresión "obstructiva" de nuevo enlace $\zeta(s)$ con $f(x)$ (p. 140); aproximación riemanniana de $f(x)$ (p. 141)
inversiones	fórmula de Euler (p. 135); ecuación funcional (pp. 136-137); transformada de Fourier (p. 139); inversiones tipo Möbius (p. 142)
armonías	integral inversa de camino (p. 136); ecuación funcional (p. 137); equilibrio armónico de la función ξ (p. 137); hipótesis de Riemann (p. 138); representación singular de $\log\xi$ (p. 138); análisis armónico y transformada de Fourier (p. 139); aproximación riemanniana de $f(x)$ (p. 141); densidad de primos (p. 142); "serie ponderada" ligada a $Li(x)$ (p. 142); pendularidades y regularidades asociadas a $f(x)$ (p. 143)

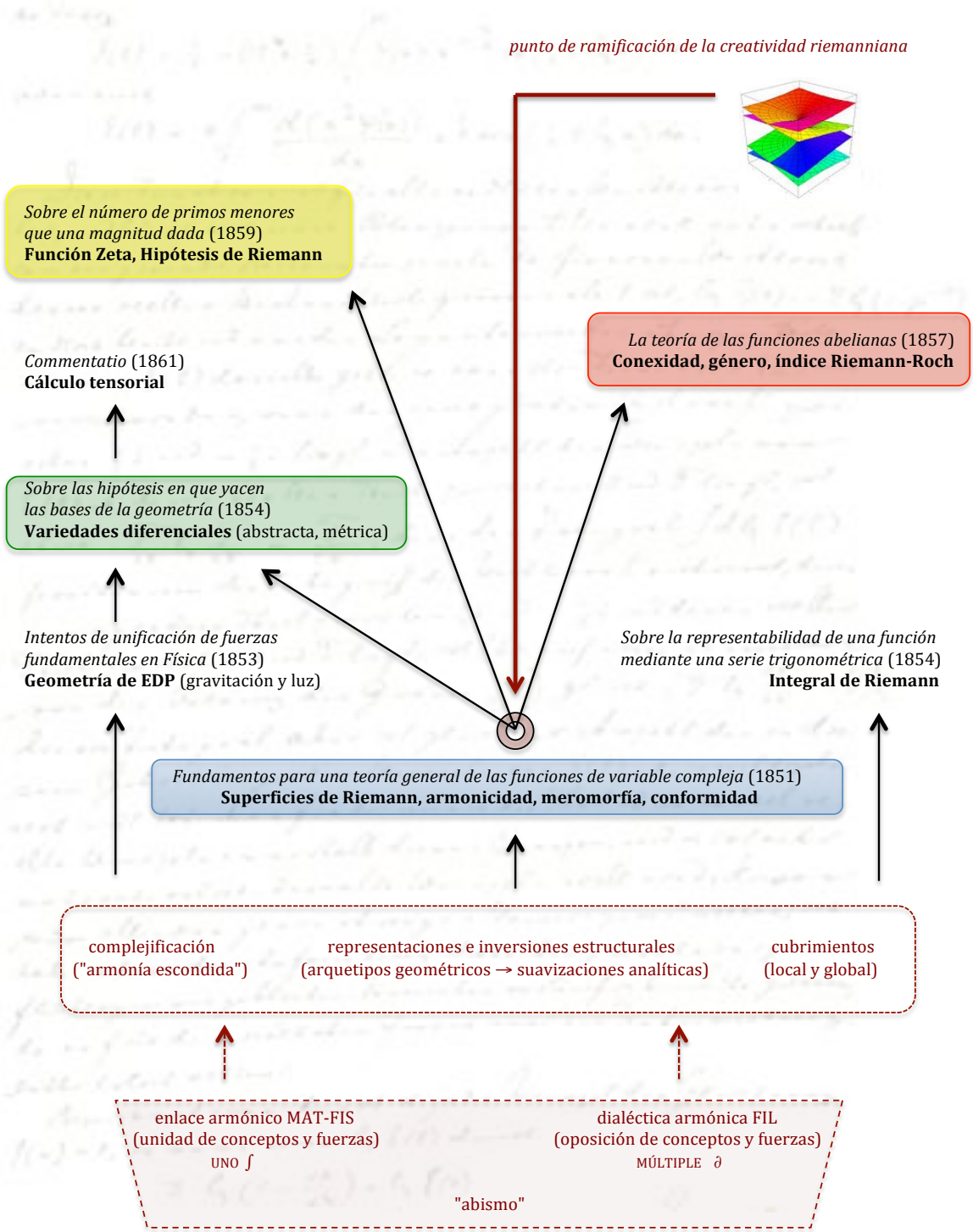




tion $\xi(t) = 0$ in this region. Now we find in fact that there are about this number of real roots in this domain, and it is very likely that all the roots are real. A rigorous proof of this would certainly be desirable; however after a few brief and fruitless attempts to find one, I have put this on one side for the time being, because it did not seem to be essential to the immediate object of my investigation.

[Por construcción de ξ, las raíces reales de la función ξ(t) corresponden a las raíces de ζ(s) sobre la recta Re(s)=1/2]

ORGANIGRAMA DE LA CREATIVIDAD EN RIEMANN
(compárese con el diagrama de "formas del pensamiento en Riemann", p. 43)

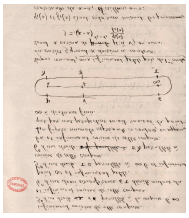
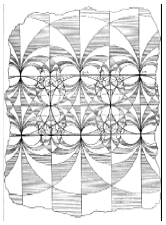


UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA – SEDE BOGOTÁ – DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

EPISTEMOLOGÍA E HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS
SEMINARIO CONTINUO DE FILOSOFÍA DE LAS MATEMÁTICAS
2013-I - SALÓN 404-212

POINCARÉ



"(...) esa intuición del orden matemático, que nos hace adivinar armonías y relaciones escondidas (...) [lleva a] inventar, discernir, escoger (...) [mediante una] sensibilidad estética especial" [Poincaré, 1908]

NUEVA PROGRAMACIÓN (19/3/2013) después del reinicio de la "normalidad" académica

1	*(6 feb).*	*Mapa del seminario: el penúltimo matemático universal.*
2	*(8 & 13 feb).*	*Ecuaciones diferenciales y sistemas dinámicos: grandes conceptos y problemas.*
3	*(15 & 20 feb).*	*Funciones automorfas, geometría y topología: grandes conceptos y problemas.*
4	*(5 & 10 abr).*	*1880: el entorno filosófico, técnico y biográfico.*
5	*(12 & 17 abr).*	*Ecuaciones diferenciales ordinarias: tratamiento cualitativo (1881).*
6	*(3 & 8 may).*	*Funciones automorfas I: variable compleja, geometría no euclideana (1880-84).*
7	*(10 & 15 may).*	*Funciones automorfas II: la invención matemática (1908).*
8	*(17 &22 may).*	*Sistemas dinámicos (1885-1895).*
9	*(24 & 29 may).*	*Topología: el grupo fundamental, la conjetura de Poincaré (1895-1904).*
10	*(31 may & 5 jun).*	*Temas en física matemática: relatividad, cosmología (1900-1905).*
11	*(7 & 12 jun).*	*Filosofía de la ciencia (1902-1912).*
12	*(14 jun).*	*Diagrama de la creatividad en Poincaré.*

	viernes	miércoles
14.00-16.00	presentación del coordinador	presentaciones de estudiantes y complementos

Prerrequisitos.
Pregrado de Matemáticas: madurez matemática, tipo *Grupos y Anillos*, *Topología* o equivalente. Posgrado de Matemáticas: abierto. Otras Carreras y Posgrados, acercarse a discutir la idoneidad (o no idoneidad) con el instructor.

Evaluación.
Cada estudiante inscrito al **curso** *Epistemología e historia de las matemáticas* deberá proponer, a mediados de semestre, el tema de un ensayo escrito (E), que desarrollará en la segunda mitad del semestre, y obtendrá también una nota de participación (P), asociada a las presentaciones complementarias de los días miércoles. La nota final del curso se obtendrá mediante la fórmula 0.3P + 0.7E.

Bibliografía.
Henri Poincaré, *Travaux et manuscrits*, Nancy: Archives Henri Poincaré (http://poincare.univ-nancy2.fr/).
Henri Poincaré, *Oeuvres (11 vols.)*, París: Gauthier-Villars, 1928-1956 (reedición, París: Jacques Gabay, 1995-2005) (la mayoría accesibles en: http://archive.org/search.php?query=henri%20poincaré).
Henri Poincaré, "Analyse des Travaux Scientifiques", *Acta Mathematica* 38 (1921): 1-135.

Fernando Zalamea - Oficina: 405-327 - Tel. (oficina): 3165000-13214
Mail: fernandozalamea@gmail.com - Web: www.docentes.unal.edu.co/fzalameat/

Febrero 8

Ecuaciones diferenciales y sistemas dinámicos: grandes conceptos y problemas

---

(A) Ecuaciones diferenciales

Herramienta imprescindible del conocimiento físico y matemático
Formaliza nociones de **cambio**: razón, variación, evolución

Ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO)

Dada función de UNA variable $y=f(x)$, una EDO es una ecuación del tipo $F(y, y', y'', \dots, y^{(n)})=0$ que correlaciona y con un número finito de sus derivadas (ordinarias).

Ecuaciones diferenciales parciales (EDP)

Dada función de VARIAS variables $y=f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, una EDP es una ecuación del tipo $F(y, \partial y/\partial x_i, \partial^2 y/\partial x_i \partial x_j, \dots)=0$ que correlaciona y con un número finito de sus derivadas parciales.

UNO — MÚLTIPLE

Una ecuación diferencial (ordinaria o parcial) es lineal si F es lineal en las derivadas ocurrentes en la ecuación.

Problema central: *existencia y unicidad* (∃!) de soluciones.

Respuestas conocidas en ciertos casos:
- cuantitativo y regular (siglo XVIII)
- local (Cauchy)

Ecuaciones centrales de la física matemática:
- onda, calor, etc.
- Laplace

Creación fulgurante (1881) de Poincaré

(I) TRATAMIENTO CUALITATIVO Y GLOBAL DE EDO
Memorias sobre las curvas definidas por una ec. dif.

Clasificación de curvas
Comportamiento (simetrías, ramas, multiplicades, etc.)
Tipología/topología de puntos singulares
Teorema del índice

"Uno de esos raros ejemplos de teoría matemática que parece nacer de la nada y que, casi inmediatamente, alcanza la perfección en manos de su creador" (Dieudonné)

LOCAL — GLOBAL
REGULAR — SINGULAR
CUANTITATIVO — CUALITATIVO

(II) CONOCIMIENTO COMPLETO DE EDO LINEALES
Memorias sobre las funciones fuchsianas

Funciones automorfas ("fuchsianas")
Grupos continuos y discontinuos
Geometría no euclideana

G E O M E T R I Z A C I Ó N

Trabajos de sistematización de Poincaré

Formas de clasificación
Principio de Dirichlet

Tesis Doctoral (1879)

Cursos en la Sorbona (30 semestres, 1885-1901)

problemas de la invención

el Maestro

(siglo XX: técnicas heterogéneas; *h-principio* de Gromov reunifica)

el Genio

(B) Sistemas dinámicos

Estudio de la evolución temporal de un sistema de puntos en un espacio dado

Dadas un "flecha" de tiempo T (continuo, discontinuo, etc.) y una variedad V ("espacio de fase"), un sistema dinámico se *determina* por una colección de difeomorfismos $\phi_t : V \to V \ (t \in T)$ ("ecuación de evolución") que captan movimientos en V, y que se representan mediante las trayectorias (órbitas) de cada punto: $<\phi_t(v), t \in T>$. ϕ_t obedece a menudo a una *ecuación diferencial*: en el caso EDO, V es de dimensión *finita*, en el caso EDP V es usualmente de dimensión *infinita*. Mucha de la información del sistema se codifica en el *espacio tangente* $T_v(V)$. Las *iteraciones* de t van explicando los movimientos del sistema y su conocimiento (cualitativo, Poincaré; computacional, fines siglo XX) se convierte en el problema central de la teoría.

Presencia de Poincaré y confirmación de un "genio matemático" (Weierstrass)

Premio del Rey Oscar II (enunciado 1885, Premio 1889)
Sobre el problema de los tres cuerpos y las ecuaciones de la dinámica
("error" 1889, publicación final 1890)

(I) DISCRETIZACIÓN DE LA DINÁMICA

Soluciones periódicas y cuasi-periódicas
Secciones y aplicaciones de Poincaré

CONTINUO DISCONTINUO

(II) PERTURBACIONES INFINITESIMALES Y CONTEXTOS GLOBALES

Teoría de bifurcaciones
Series asintóticas y series divergentes
Teorema de recurrencia
Infinitud de curvas asintóticas infinitamente cercanas
Variaciones mínimas en condiciones iniciales generan comportamientos impredecibles
("caos determinista")

DETERMINACIÓN INDETERMINACIÓN
INVARIANZA INESTABILIDAD
CONVERGENCIA DIVERGENCIA
CONTROL "CAOS"

G E O M E T R I Z A C I Ó N

Métodos nuevos de la mecánica celeste (1892-1899)

SEMINARIO CONTINUO DE FILOSOFÍA DE LAS MATEMÁTICAS
2013-I – POINCARÉ

Febrero 15
Funciones automorfas, geometría y topología: grandes conceptos y problemas

---

(A) Teoría de funciones

Base previa: funciones elípticas, abelianas y modulares (*)
(Legendre – Abel, Jacobi, Galois – Riemann)

REDES DE TRANSFORMACIONES COMPLEJAS
(periodos integrales, teselación del plano, grupo modular, representación conforme)

Emergencia de Poincaré (Caen, Verano 1880)
ENLACE CON EDOL

ecuaciones diferenciales ordinarias lineales "recubiertas" por funciones que generalizan (*)

funciones elípticas (integrales de diferenciales algebraicos) inversión simple (variable como función de la integral) invarianza bajo grupo modular cocientes de funciones teta	**funciones "fuchsianas"** (=automorfas) (integrales de EDOL) inversión racional (variable como función de una *razón* de integrales) invarianza bajo **grupo automorfo** cocientes de funciones "tetafuchsianas"

(B) Geometría no euclideana

teselación del plano euclideano por paralelogramos (recubrimiento desde el paralelogramo fundamental) geometría de Euclides	teselación del **plano hiperbólico** por polígonos curvilíneos (recubrimiento desde el círculo fundamental) geometría de Lobachevski

Tensión Filosófica Central
Simiente del Programa de Langlands
comprensión de las transformaciones entre **redes** aritméticas y **redes** diferenciales

formas aritméticas ⟷ formas diferenciales

Fig. 156.

ARITM		DIFER
L-representaciones de dimensión n de Gal(K* : K)	≈	formas automorfas de GL(n : K)

Langlands

(C) Topología

Base previa: topología de las superficies de Riemann

REDES DE CAMINOS
(cortes, circuitos, ramificaciones)

Emergencia de Poincaré

(I. Caen, 1880-1881)

Tipología
---------- de EDO (trayectorias, ciclos, ramas, asíntotas, infinitud, alturas, ...)
Topología

(II. Sorbona, 1895)

Analysis Situs (1895) "artículo fascinante y exasperante" (Dieudonné) - múltiples invenciones y errores

objetos	variedades *n*-dimensionales (definiciones extrínseca e intrínseca) superficies, hipersuperficies variedades 3-dimensionales
variaciones	funciones implícitas, orientabilidad, inmersiones homologías, combinatoria dualidad
invariante	GRUPO FUNDAMENTAL

Cinco Suplementos

Primero (1899): diferentes números de Betti, cirugía y complejos celulares

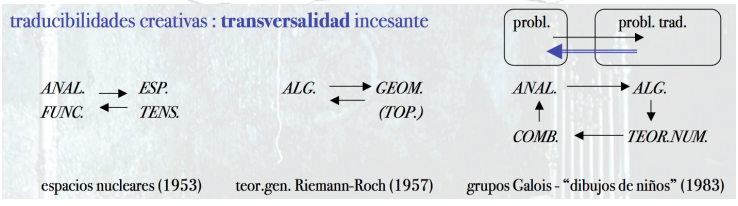
Segundo (1900): torsión, conjetura "simple" de Poincaré (¿homología caracteriza hiperesfera?)

Tercero, Cuarto (1902): aplicaciones a geometría algebraica (funciones de dos variables complejas)

Quinto (1904): "Conjetura de Poincaré" (¿grupo fundamental caracteriza hiperesfera?)

Tensión Filosófica Central
Simiente del Programa de Grothendieck
comprensión de las transformaciones entre **redes** geométricas y **redes** algebraicas

formas geométricas ⟷ formas algebraicas



Grothendieck

Abril 5
1880: entornos técnico, filosófico y biográfico

(A) El entorno técnico

Influencias directas

(a) Escuela francesa de ecuaciones diferenciales: Bonnet, Briot, Bouquet, Darboux.

(b) Maestros franceses: Jordan, Hermite.

(c) Correspondencia con Klein (1881-1882).

Influencias indirectas

(D) Espíritu de **Galois** (estrategia de Poincaré: *grupos por doquier*. En EDOL: grupos modulares, fuchsianos, kleinianos, automorfos, de Lie. En topología: grupos de homología, grupo fundamental. En física: grupo de Poincaré).

(E) Espíritu de **Riemann** (estrategia de Poincaré: *formas cualitativas por doquier*. En EDO: tipología y clasificación de curvas, teorema del índice. En teoría de funciones: teorema de uniformización para superficies de Riemann. En topología algebraica: dualidad).

Herencia

(1) Sucesores indirectos: Appell, Picard, Hadamard, Painlevé, Langevin.

(2) Quiebre con las nuevas generaciones: Borel, Baire, Fréchet, Lebesgue, Montel.

(3) "Olvido" posterior por Bourbaki, grupo que adopta la herencia de Hilbert.

(4) "Recuperación" vía Conjetura de Poincaré (n≥5, Smale 1961; n=4, Freedman 1982; n=3, Perelman 2002/2003) y vía desarrollo de los sistemas dinámicos.



Medalla
(Gondard, 2012)

(B) El entorno filosófico

(I) *Círculo familiar*

Émile Boutroux (esposo de Aline, hermana de Poincaré) (1845-1921)
- defensor de una filosofía del espíritu, opuesto al materialismo
- maestro de Berr, Bergson, Durkheim
- catedrático de historia de la filosofía moderna (Sorbona, desde 1888)

Pierre Boutroux (hijo de Émile y Aline)
- filósofo e historiador de la matemática

Jules Tannery
- matemático (1874, Tesis sobre Fuchs; editor de manuscritos de Galois)

(II) *Lecturas mayores*

- Leibniz (apéndice a la *Monadología*, editada por E. Boutroux, 1881)

- Russell (debate sobre los *Fundamentos de la Geometría*, 1898-1902)

- Cantor, Zermelo, Hilbert (debate sobre la teoría de conjuntos) y logicistas: Peano, Couturat, Russell (debate sobre la lógica matemática, 1894-1912)

Propuestas centrales

(A) Arte de la **balanza**: conceptos *polares alternos* (derecha / rojo) deben ponderarse en **RED**

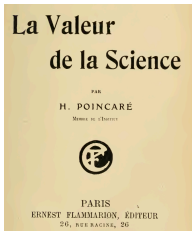
lógica	sicología
deducción	inducción
demostración	invención
estructura	génesis

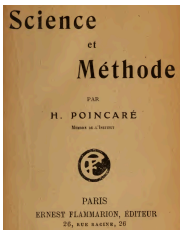
(B) Arte de la **analogía**: las diversas regiones del saber deben conectarse en **RED**

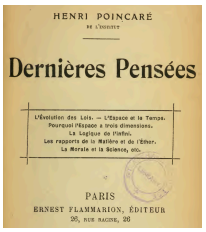
(C) Arte de la **globalidad**: los axiomas y ambientes estructurales deben adecuarse en **RED**

*Holismo y convencionalismo: transformabilidad de las **REDES** del conocimiento*









(C) El entorno biográfico

fecha	vida	obra
1854 (29 abr)	Nacimiento en Nancy	
1859	Difteria / parálisis (piernas, laringe) por cinco meses	
1862-1873	*Liceo Imperial* (Nancy)	
1871	Bachilleratos en Letras ("Bien") y Ciencias ("Assez Bien")	
1872/1873	Premios de Honor en el *Concours Général* de Matemáticas	
1873	Entra (1º) a la *École Polytechnique*	
1875-1878	*École des Mines* - Ingeniero, inspector	Primera publicación (oct 1874)
1879 (1 ago)	Doctorado (*École Polytechnique*, bajo Bonnet)	*Sobre las propiedades de funciones definidas por ecuaciones diferenciales parciales*
1879 (1 dic)	Encargado de curso (Análisis) en Fac. Ciencias de Caen	
1880 *annus mirabilis*	Menciones "muy honorables" (1880/1881) en el Gran Premio de Matemáticas de la Academia de Ciencias	(22 mar) ***Sobre las curvas definidas por una ecuación diferencial*** (28 may) ***Sobre las funciones fuchsianas*** (jun-dic) *Tres suplementos sobre las funciones fuchsianas* Descubrimiento de las funciones automorfas
1881 (20 abr)	Matrimonio con Louise Poulain D'Andecy (3 hijas, 1 hijo)	
1883-1897	"Repetidor" de Análisis en la *École Polytechnique*	Múltiples publicaciones sobre tratamiento cualitativo de EDO, funciones automorfas y enlaces con geometría no euclideana
1884 (25 nov)	Apertura del Concurso del Rey Oscar II (bajo Mittag-Leffler, Hermite, Weierstrass)	
1885-1901	Catedrático de Física Matemática en la Sorbona	*Estudio de una masa fluida en rotación en un campo de fuerzas* (mareas, creación de la Luna)
1887 (31 ene)	Elegido a la Academia de Ciencias (a los 32 años)	
1888-1912	Miembro honorario / correspondiente / emérito de multitud de instituciones científicas (Francia y Exterior)	
1889 (20 ene)	Gana el Gran Premio del Rey Oscar II	
1889-1890	"Error" (Phragmen, julio), correcciones y añadidos a la Memoria ganadora	***Sobre el problema de los tres cuerpos y las ecuaciones de la dinámica***
1892-1899		***Métodos nuevos de la mécanica celeste (3 tomos)***
1895		***Analysis situs***
1899-1904		*Cinco complementos al Analysis Situs (5º compl.: Conjetura de Poincaré)*
1900 (6-12 ago)	Presidente del Congreso Internacional de Matemáticas (París, Problemas de Hilbert)	
1904	Reporte (Appell, Darboux, Poincaré) sobre caso Dreyfus	
1905 (18 abr)	Premio Bolyai (1ª edición)	***Sobre la dinámica del electrón*** (principio de la relatividad)
1908	Elegido a la *Académie Française*	***La invención matemática*** *El porvenir de las matemáticas*
1910	Relator del Premio Bolyai (2ª edición, Hilbert)	
1912	Director de la *Académie Française*	*Cuatro libros de **filosofía matemática**:* *(1902) La ciencia y la hipótesis* *(1905) El valor de la ciencia*
1912 (17 jul)	Muerte (complicación quirúrgica) en París	*(1908) Ciencia y método* *(1913, póstumo) Últimos pensamientos*

Abril 12
Teoría cualitativa de EDO

Esquema del artículo (1881) y primera extensión (1882)
Memoria sobre las curvas definidas por una ecuación diferencial

capítulo	*páginas (Oeuvres I)*	*Contenidos Matemáticos*	*Conceptualización y Metodología*
Intr	3-6	Cualidad y cantidad / Globalidad y localidad Trama de curvas características Compactificación en la esfera	Estudio propio ("en sí mismo", irreducible) de EDO Apertura y descubrimiento
1	6-12	Ciclos – Condición sobre (semi)características para ser ciclos **Sistema topográfico y puntos singulares** "Puertos", "cimas", "fondos"	Tipología Analogías geográficas
2	12-20	Estudio *local* de las características – Caso regular (Cauchy): ∃! Puntos singulares: nodos (∃∞), puertos (∃2), focos (asíntotas a espiral logarítmica), centros (ciclos envolventes, foco extremo)	Sistematización *Red de clasificaciones (analíticas)*
3	20-33	Distribución *local/global* de los puntos singulares Índice de un ciclo: sin singulares (0), puerto (-1), foco (+1) **Teorema del índice: N+F−P=2** N (nodos), F (focos), P (puertos)	Analogías variable compleja Deformaciones topológicas *Red de invarianzas (sintéticas)*
4	33-44	Teoría *global* de los contactos Número de contactos entre curvas algebraicas y características Ciclos sin contacto	Clasificación analítica Tipología de los extremos
5	44-53	Teoría de los consecuentes Correlación características / singulares (punto vista consecuentes) Inestabilidad de órbitas ligadas a **ciclos sin contacto**	Recorridos topológicos (1) Emergencia de lo inestable
6	53-65	Clasificación geométrica de (semi)características **Ciclos límite** – Correlación con focos Anillos límite – Estabilidad en regiones interanulares	Recorridos topológicos (2) Control parcial de lo inestable
7	65-73	Ejemplos de discusiones completas (sistemas topográficos dibujables, ciclos límite algebraicos)	Inversión metodológica: lo particular (ejemplo) como explicación de lo general (teoría)
8	73-80	Reconocimiento (separación) de ciclos límite	Analogías con ecuaciones algebraicas
9	80-84	Ejemplos de discusiones incompletas	Revés

Capítulos 2, 3 (sombreados en gris): *REPRESENTABILIDAD EN RED*

CONTENIDOS CONCEPTUALES MAYORES DE LA MEMORIA

(I) ecuaciones algebraicas

una solución

todas las soluciones

teoría de la *ambigüedad* (Galois)

ecuaciones diferenciales

una solución (funcional)

todas las curvas (no sólo funciones)

LOCAL

GLOBAL

trazos cualitativos
ramas / asíntotas / ciclos
RED de relaciones

Doble dialéctica ("revés del espejo") entre lo Uno y lo Múltiple:
(1) existencia y unicidad local de soluciones (Cauchy), pero multiplicidad de curvas a nivel global
(2) multiplicidad de regiones y localizaciones, pero unidad (Poincaré) del mapa global.

OBSTRUCCIONES CONVERTIDAS EN TRÁNSITOS

Grupo de Galois **Red de Poincaré**

(II) redes cualitativas del análisis y de la geometría
clasificación analítica y combinatoria geométrico/topológica
de puntos singulares y de curvas características

FLUCTUACIONES CONVERTIDAS EN INVARIANZAS

Teorema del Índice

péndulo de los extremos:
ciclos sin contacto – INESTABILIDAD
ciclos límite – ESTABILIDAD relativa

Tensión Filosófica Central
Simiente del Teorema del Índice
(Atiyah-Singer, 1963, vía Grothendieck 1957)

tránsito y obstrucción en los cambios de la naturaleza, caracterizados por la geometría del entorno

índice: (#soluciones) - (#restricciones) para operadores diferenciales elípticos
determinado por adecuados invariantes topológicos
[inestables por separado, muy sensibles localmente; pero **diferencia** estable globalmente!]

ANÁLISIS → TOPOLOGÍA mediación GEOMETRÍA ALGEBRAICA

SEMINARIO CONTINUO DE FILOSOFÍA DE LAS MATEMÁTICAS
2013-I – POINCARÉ

Mayo 3
Teoría de funciones fuchsianas (= automorfas)

Trabajos inéditos

1880	May 29	**Memoria Concurso Academia Ciencias** (35pp., publ. 1923)
	May 29 - Jun 19	Correspondencia con Fuchs (publ. 1921)
	Jun 28, Sep 6, Dic 20	**Tres Suplementos** (80pp., 23 pp., 12 pp., publ. 1997)
[1881	Mar 14	Resumen de Memorias enviadas al Concurso (Reporte Hermite, *CRAS* 92, 551-554)]

Publicaciones

1881	Feb 14	**Primer Artículo: "Sobre las funciones fuchsianas"** (*CRAS* 92, 333-335)
	Feb 21, Abr 4, 18, May 23, 30, Jun 27	1ª Cascada de notas breves (*Comptes Rendus Académie Sciences*)
	Jun 12	Comienzo de correspondencia con Klein (aparición Riemann) (publ. 1923)
	Jul 11	"Sobre los grupos kleinianos" (*CRAS* 93, 44-46)
	Ago 8, Oct 17...	
1882	Ene 23, Mar 27, Abr 10, 24	2ª Cascada de notas breves (*Comptes Rendus Académie Sciences*)
1882	Jul (escr.) / Sept (publ.)	**"Teoría de los grupos fuchsianos"** (*Acta Mathematica*, 1-62)
	Oct (escr.) / Nov (publ.)	**"Memoria sobre las funciones fuchsianas"** (*Acta Mathematica*, 193-294)

Algunos temas esenciales

Memoria Concurso	Estudio de la razón $\eta=y_1/y_2$ de soluciones $y_1(z)$, $y_2(z)$ de la ecuación de Fuchs: $y''+A(z)y'+B(z)y=0$, mediante herramientas de variable compleja. Estudio de la meromorfía de la inversa de η (*dominio de la función inversa*), vía *triangulaciones*, continuación analítica y transformaciones conformes.
Primer Suplemento	Emergencia de grupos y funciones fuchsianas. Conexión con el grupo de transformaciones de la *geometría de Lobachevski*. Analogía central: [Fuchsianas / Lobachevski ≡ Elípticas / Euclides]. Series fuchsianas y teoremas de representación. Extensión: Zetafuchsiano y Tetafuschsiano vs. Zeta y Teta.
Segundo Suplemento	Explicitación de la geometría no euclideana del disco y estudio de sus invarianzas bajo "movimientos pseudogeométricos" (az+b)/(cz+d) (coeficientes reales). *Descomposición poligonal* del disco, grupo asociado y extensión a generalizaciones de funciones fuchsianas.
Tercer Suplemento	Caso de ecuación fuchsiana –ecuación hipergeométrica, subparticularizada en la ecuación de Legendre para los periodos de integrales elípticas– y descomposición poligonal asociada. "Las nuevas funciones permitirán integrar todas las ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes algebraicos".
Resumen de Memorias (Reporte Hermite)	Memoria No.5 (Poincaré, bajo el epigrama *Non inultus premor*, mote de Nancy: no hay presión sin venganza). "Talento que ha impactado a la Comisión" (Bertrand, Bonnet, Puiseux, Bouquet, Hermite). "Lagunas [de Fuchs] que el autor ha reconocido". "Vía fecunda (...) que revela un espíritu inventivo y profundo". "Mención muy honorable".
Primer Artículo	Anuncios de resultados: definición de funciones y grupos fuchsianos, "ayuda de la geometría no euclideana", clasificación universal de grupos fuchsianos ("emergencia de lazos íntimos que unen la teoría de números a las cuestiones analíticas"), definición de series tetafuchsianas.
Teoría de los grupos fuschsianos	Grupos fuchsianos: grupos discontinuos de "substituciones reales" (az+b)/(cz+d). Representación de los grupos fuchsianos mediante polígonos. Clasificación poligonal y clasificación por géneros. *Enlace con superficies de Riemann*. Ejemplos, generalizaciones y recuento histórico (Fuchs, Klein).
Memoria sobre las funciones fuchsianas	Funciones fuchsianas: invariantes bajo grupos fuchsianos. Representación de funciones fuchsianas mediante cocientes de series tetafuchsianas. Convergencia (acotación sumas parciales) vía geometría no euclideana (conteo de puntos). *Enlace con integrales abelianas*.

CONTENIDOS CONCEPTUALES MAYORES DE LOS TRABAJOS

(I) Formas de analogía

Funciones elípticas	Funciones fuchsianas
Invariantes bajo grupo modular	Invariantes bajo grupos fuchsianos
Teselación euclideana del plano (paralelograma generador)	Teselación no euclideana del disco (polígono generador)

GRUPO: codificador de las analogías

(II) Formas de representación

II.1. Descomposición triangular del dominio de la función inversa

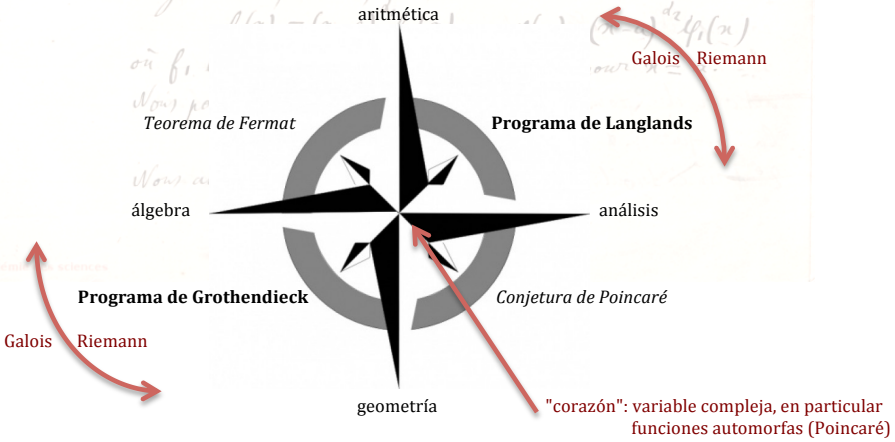
II.2. Descomposición poligonal del disco

II.3. Composición de grupos fuchsianos (vía polígonos, géneros)

II.4. Composición de funciones fuchsianas (vía cocientes de series tetafuchsianas)

GEOMETRÍA NO EUCLIDEANA: guía de las representaciones

FUNDAMENTAL ROSA MATEMÁTICA DE LOS VIENTOS



Mayo 10
La invención matemática

Conferencia: "La invención matemática" *(Institut Général Psychologique*, 1908)

Algunos pasajes notables

1. "¿Cómo el error es posible en matemáticas? (...) Imaginemos una larga serie de silogismos, y que las conclusiones de los primeros sirvan como premisas para los siguientes; seremos capaces de entender cada uno de esos silogismos, y no es en el paso de las premisas a la conclusión donde nos arriesgamos a equivocarnos. Pero entre el momento donde encontramos por primera vez una proposición, como conclusión de un silogismo, y aquel donde la encontramos como premisa de otro silogismo, a veces mucho tiempo habrá discurrido, y se habrán desenvuelto numeros anillos de la cadena; puede entonces suceder que se la haya olvidado, o, lo que es más grave, que se haya perdido su sentido. Puede que se la reemplace por una proposición un poco diferente, o que, aunque se conserve el mismo enunciado, se le atribuya un sentido un poco diferente, y es así como se está expuesto al error" (p. 4).

2. "Una demostración matemática no es una simple yuxtaposición de silogismos, son silogismos *situados en un cierto orden*, y el orden en el cual esos elementos están situados es mucho más importante que los elementos mismos" (p. 5).

3. "El sentimiento [delicado y difícil de definir], la intuición del orden matemático, nos hace adivinar armonías y relaciones escondidas" (p. 6).

4. "Aquellos que posean en un grado más o menos alto la intuición especial de la que acabo de hablar, no sólo podrán comprender las matemáticas, aunque su memoria no sea extraordinaria, sino que podrán convertirse en creadores y buscarán inventar con mayor o menor éxito, dependiendo del desarrollo de esa intuición" (p. 6).

5. "¿Qué es, en efecto, la invención matemática? No consiste en hacer nuevas combinaciones con seres matemáticos ya conocidos. (...) Inventar consiste precisamente en no construir las combinaciones inútiles y en construir aquellas que son útiles y que no son sino una ínfima minoría. Inventar es discernir, es escoger. Cómo debe escogerse (...) por analogía (...) por revelación de familiaridades insospechadas (...) Las más fecundas serán a menudo aquellas formadas por elementos tomados de dominios muy alejados" (pp. 6-7).

6. "Lo que les impactará ante todo son esas apariencias de iluminación súbita, signos manifiestos de un largo trabajo inconsciente previo; el papel de ese trabajo inconsciente en la invención matemática me parece incontestable (...) Podría decirse que el trabajo consciente ha sido más fructífero porque ha sido interrumpido y el reposo le ha devuelto al espíritu su fuerza y su frescura" (pp. 9-10).

7. "Las inspiraciones súbitas no se producen sino después de varios días de esfuerzos voluntarios (...) La necesidad del segundo periodo de trabajo consciente, después de la inspiración, se entiende aún mejor. Hay que poner en obra los resultados de esa inspiración, deducir sus consecuencias inmediatas, ordenarlas, redactar las demostraciones. Y sobre todo hay que verificarlas" (p. 10).

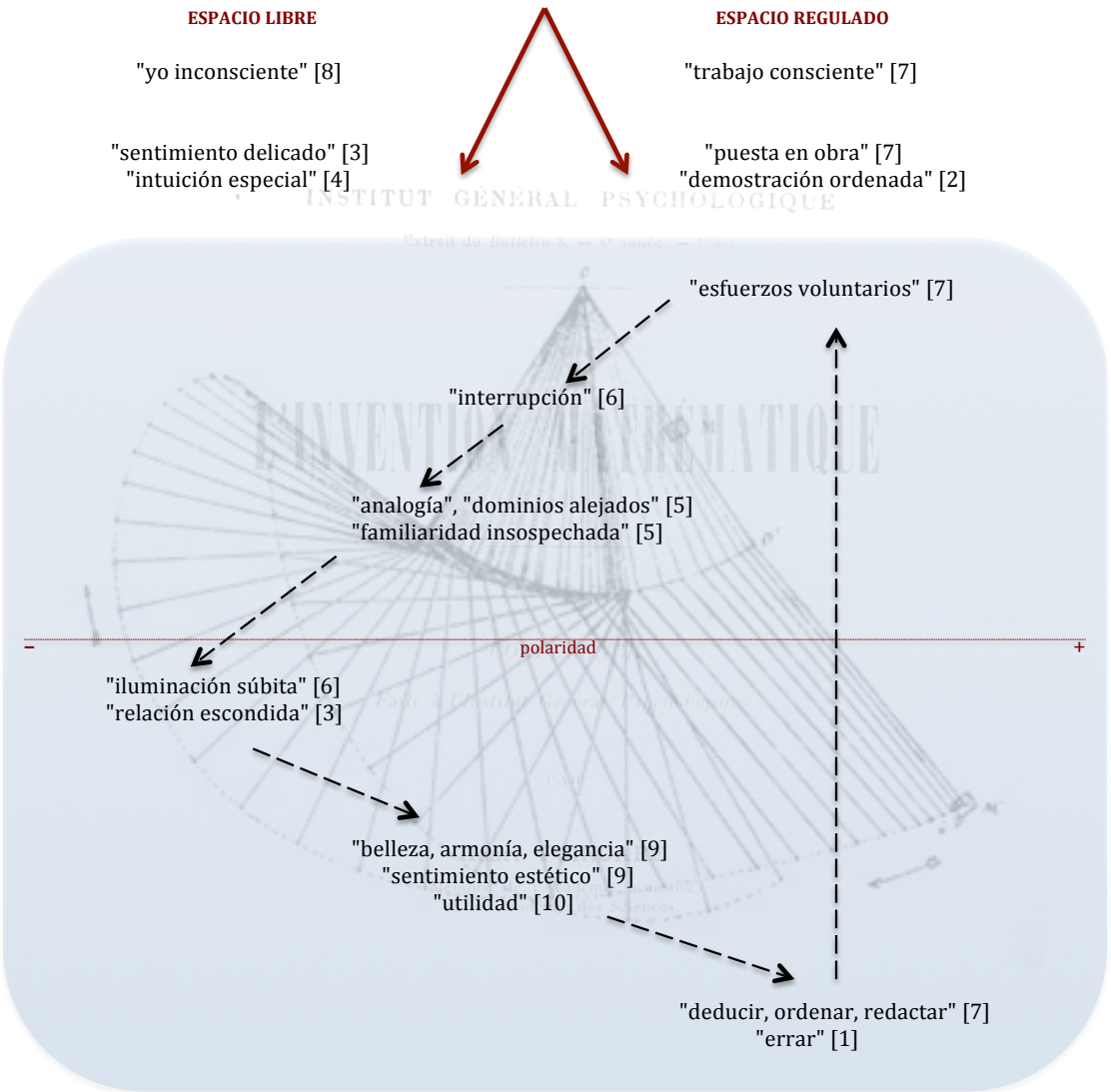
8. "El yo inconsciente, o, como se dice, el yo subliminal, juega un papel capital en la invención matemática (...) El trabajo matemático no es un simple trabajo mecánico (...) Las reglas que lo guían son extremadamente finas y delicadas, es casi imposible enunciarlas en un lenguaje preciso; se sienten más que se formulan" (pp. 10-11).

9. "Podemos asombrarnos de ver cómo se invoca la sensibilidad en lo que se refiere a las demostraciones matemáticas, que, parece ser, solo deben interesar a la inteligencia. Sería olvidar el sentimiento de la belleza matemática, de la armonía de los números y de las formas, de la elegancia geométrica. Es un verdadero sentimiento estético que todos los verdaderos matemáticos conocen. Y esto es sensibilidad" (p. 12).

10. "Las combinaciones útiles son precisamente las más bellas, quiero decir aquellas que mejor encantan a esa sensibilidad especial que todos los matemáticos conocen (...) Serán armoniosas, y por tanto útiles y bellas a la vez, serán capaces de conmover la sensibilidad especial del geómetra (...) que, al ser excitada, llamará nuestra atención, y les otorgará la posibilidad de tornarse conscientes" (pp. 12-13).

OSCILACIONES PENDULARES DE LA INVENCIÓN MATEMÁTICA

el péndulo pascaliano
(imaginación / razón)



GEOMETRÍA DE LAS (DE)FORMACIONES CREATIVAS

ciclo espiral inventivo: entre libertad y regulación
sensibilidad a espacios alternos, cercanos al NO: inconciencia, interrupción, error

SEMINARIO CONTINUO DE FILOSOFÍA DE LAS MATEMÁTICAS
2013-I – POINCARÉ

Mayo 17
Sistemas dinámicos

Preludio

1881-1882 "Memoria sobre las curvas definidas por una ecuación diferencial" [JMPA VII: 375-422; VIII: 251-296]
Formas de inestabilidad ("completa": ciclos sin contacto; "relativa": ciclos límite)

1882-1884 Notas sobre series trigonométricas [CRAS 95: 840-843; 97: 1471-1473; *Bull.Astr*. 1: 65-74]
Divergencia de las series y problemas de inestabilidad del sistema solar

Memoria (Premio del Rey Oscar, propuesto 1885; entregado Junio 1888; otorgado a Poincaré 1889, bajo el epigrama *Nunquam praescriptos transibunt sidera fines*: "Nunca las estrellas cruzarán sus límites prescritos"; corregido 1890)

1889 "Sobre el problema de los tres cuerpos y las ecuaciones de la dinámica" – Manuscrito inicial

1890 "**Sobre el problema de los tres cuerpos y las ecuaciones de la dinámica**" [*Acta Math*. 13: 1-270]

Obra final

1892-1899 ***Los métodos nuevos de la mecánica celeste*** [Gauthier-Villars, tres tomos, 1892, 1893, 1899]

Algunos temas esenciales

Manuscrito inicial [descripción en Gray, *Henri Poincaré*, pp. 270-280]	Anuncio: estabilidad en el problema restringido de los tres cuerpos (masas grande, pequeña, infinitesimal). (I). Los grandes aportes. *Invariantes integrales* para ecuaciones canónicas de la dinámica (cálculo de variaciones). Existencia de *soluciones periódicas*. *Geometría perturbativa* asociada (variación infinitesimal de las condiciones iniciales del "planetoide" y estudio de las trayectorias asociadas: acotación espacial). Preservación del volumen y *Teorema de Recurrencia* ("Teorema de estabilidad *à la* Poisson"). Clases de trayectorias dependiendo de la masa del planetoide (μ). Soluciones y superficies asintóticas (vía series de potencias en $\sqrt{\mu}$). (II). **El "error más fecundo".** *Convergencia de las series. Iteraciones y superficies asintóticas cerradas. Periodicidad de soluciones cercanas a una solución periódica.*
Memoria *Acta Mathematica* [escrito en un mes (!) después de las observaciones de Phragmén]	Parte I. Cap. 1. "Propiedades generales de las ecuaciones diferenciales". Cap. 2. "Teoría de los invariantes integrales". Cap. 3. "Teoría de las soluciones periódicas". Parte II. Cap. 1. "Estudio de casos con dos grados de libertad". Cap. 2. "Estudio de las superficies asintóticas". Cap. 3. "Resultados diversos". Cap. 4. "Intentos de generalización". Corrección: ***inestabilidad*** en el problema restringido de los tres cuerpos. Aparición de intersecciones homoclínicas. *Divergencia de las series. Iteraciones secantes. Infinitud de trayectorias doblemente asintóticas.* "Sólo después de muchas investigaciones y esfuerzos los geómetras conocerán completamente este dominio, en el que no he podido hacer más que un simple reconocimiento, y encontrarán un terreno sólido desde el cual puedan lanzarse a nuevas conquistas" (frase final).
Los métodos nuevos de la mecánica celeste	Arquitectónica *ex-nihilo* de los sistemas dinámicos: expansiones de Poincaré; exponentes característicos; series asintóticas y series divergentes; dominios de Poincaré; teorema de recurrencia; sección y aplicación de Poincaré; soluciones homoclínicas y heteroclínicas; estructura orbital. "Inténtese representar la figura formada por estas dos curvas [estable e inestable] y sus infinitas intersecciones que corresponden a una solución doblemente asintótica. Esas intersecciones forman una suerte de retículo, de tejido, de red con mallas infinitamente estrechas. Cada una de esas curvas no debe nunca recortarse a sí misma, pero debe replegarse de una manera muy compleja para recortar una infinidad de veces todas las mallas de la red. Quedaremos golpeados por la complejidad de esa figura, que ni siquiera intento trazar" (1899, vol. 3, p. 389).

CONTENIDOS CONCEPTUALES MAYORES DE LOS TRABAJOS

(I) La apertura hacia el NO: cualidad, multiplicidad, divergencia, infinitud, inestabilidad, generalidad

Tratamiento *cualitativo global* de las trayectorias	(NO cálculos cuantitativos locales)
Consideración de *todas* las trayectorias	(NO una trayectoria singular)
Incorporación de series *divergentes*	(NO convergentes)
Infinitud de trayectorias *infinitamente* cercanas	(NO finitud y discreción)
Intersecciones *homoclínicas* en sistemas deterministas	(NO estabilidad)
Elevación de lo negativo a lo *general*	(NO particularidad)

REDES NEGATIVAS: guías de la invención

(II) La aceptación del NO: notable asimilación del error

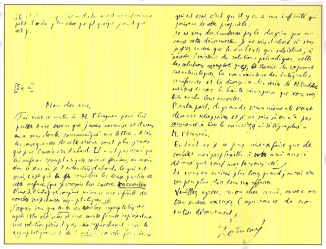
Carta a Mittag-Leffler (1/12/1889)

"Las consecuencias del error son más
graves de lo que había creído en un comienzo"

"Las dos partes de las superficies asintóticas
se cortan a lo largo de una infinitud de curvas"

~~UNICIDAD~~ → MULTIPLICIDAD (fuerte: infinitud)

"Grandes arreglos van a resultar necesarios"



(III) El control relativo del NO: "caos"

"Una causa muy pequeña, que se nos escapa, determina un efecto considerable que no podemos no ver, y entonces decimos que ese efecto se debe al azar (...) Si el fenómeno ha sido previsto, decimos que está regido por leyes; pero no es siempre así, puede suceder que pequeñas diferencias en las condiciones iniciales generen otras muy grandes en los fenómenos finales; un pequeño error en las primeras produciría un error enorme en estos últimos" ["El azar", 1907, en *Science et méthode*, p.68].

C*ontroles* posteriores:

Birkhoff (1917)
Intersecciones homoclínicas implican infinitas trayectorias periódicas de periodos arbitrariamente grandes

Smale (1960)
"Herradura de las playas de Río" – Estructura general de los sistemas dinámicos

Escuela brasileña (Peixoto, Palis, etc.) (1960s - hoy)

Crovisier (2005)
Si un sistema dinámico posee un comportamiento "complejo" existen intersecciones homoclínicas en una vecindad
(recíproco del Teorema de Poincaré: intersecciones homoclínicas implican comportamiento complejo)

REDES HOMOCLÍNICAS: guías del "caos determinista"

SEMINARIO CONTINUO DE FILOSOFÍA DE LAS MATEMÁTICAS
2013-I – POINCARÉ

Mayo 24
Topología

Preludio

Consideraciones topológicas diversas en sus grandes memorias previas
(EDO cualitativas, funciones automorfas, teoría de grupos, sistemas dinámicos)

Memoria central

1895 "***Analysis Situs***" [*J. École Polytechnique* 1 (1895): 1-121]
(anuncio: "Sobre el *Analysis Situs*" [*CRAS* 115 (1892): 633-636])

Cinco complementos

1899 "Complemento al *Analysis Situs*" [*Rend. Circ. Mat. Palermo* 13 (1899): 285-343]
1900 "Segundo Complemento al *Analysis Situs*" [*Proc. London Math. Soc.* 32 (1900): 277-308]
1902 "Tercer Complemento al *Analysis Situs*" [*Bull. Soc. Math. France* 30 (1902): 49-70]
1902 "Cuarto Complemento al *Analysis Situs*" [*JMPA* 8 (1902): 169-214]
1904 "**Quinto Complemento al *Analysis Situs***" [*Rend. Circ. Mat. Palermo* 18 (1904): 45-110]

Algunos temas esenciales

Analysis situs	Definición extrínseca de variedad *n*-dimensional (§1). Definición de homeomorfismo (§2). Definición intrínseca de variedad (vía continuación analítica y red de variedades) (§3). Variedades "opuestas" (dualidad) (§4). Definición de **homología** (§5). Números de Betti (§6). Integración sobre variedades (§7). Tipos de variedades (unilaterales: banda de Möbius; bilaterales) (§8). Intersecciones de variedades (cirugía, homología, **dualidad**; Teorema de dualidad de Poincaré para números de Betti) (§9). Representaciones geométricas (variedades 3-dimensionales en R^4) (§10). Representaciones por grupos discontinuos (§11). **Grupo Fundamental** (Grupo de Poincaré): tipos de **homotopía**, no conmutatividad (§12). "Equivalencias fundamentales" (presentación del grupo fundamental vía generadores y relaciones; esbozo de ideas en la reconstrucción del primer grupo de homología como abelianización del grupo fundamental) (§13). Problema del homeomorfismo: **caracterización** de variedades vía números de Betti (sí para superficies, no en general), vía grupo fundamental (abierto) (§14). Modos de generación (§15). Generalización del Teorema de Euler (congruencias, derivaciones, descomposiciones) (§16-18).
Complementos	I. Variedades con estructuras poliédricas. Homología combinatoria. Revisión y generalización de números de Betti. Teorema de dualidad. II. Torsión. Coeficientes de torsión. *1ª forma de la Conjetura de Poincaré*: "Para no extender mucho este trabajo, me reduciré a enunciar el teorema siguiente cuya demostración exigiría algunos desarrollos: todo poliedro con números de Betti iguales a 1 y con tableros bilaterales es simplemente conexo, es decir homeomorfo a la hiperesfera" [*Oeuvres*, 6, p. 370] (caracterización de la esfera tridimensional cómo única variedad cerrada con *homología* trivial – resultado erróneo, como lo detectará el mismo Poincaré). III. IV. Aplicaciones a la teoría de superficies algebraicas (2 variables complejas = 4 variables reales). Determinación del segundo número de Betti (primero, determinado por Picard). V. Geometría no euclidiana y homotopía. **Esfera de Poincaré**: construcción de variedad tridimensional cerrada, con grupo trivial de homología, pero con grupo no trivial de homotopía (contiene al icosaedro). Última página: **Conjetura de Poincaré** (se trata en realidad de una pregunta: "Quedaría una pregunta por tratar: ¿es posible que el grupo fundamental de *V* [variedad tridimensional cerrada, *Oeuvres* 6, p. 486] se reduzca a la substitución idéntica, sin que *V* sea sin embargo simplemente conexa?" [*Oeuvres* 6, p. 498].

CONTENIDOS CONCEPTUALES MAYORES DE LOS TRABAJOS

Emergencia de la **Topología Algebraica**

Espacios Continuos ⟶ Grupos

cubrimientos

lineales: HOMOLOGÍA

X ⟶ $H_1(X)$

continuos: HOMOTOPÍA

$\pi_1(X)$ = *grupo fundamental*

UNO ⟶ MÚLTIPLE

. . . cadenas $H_i(X)$, $\pi_i(X)$, $i \geq 1$ . . .

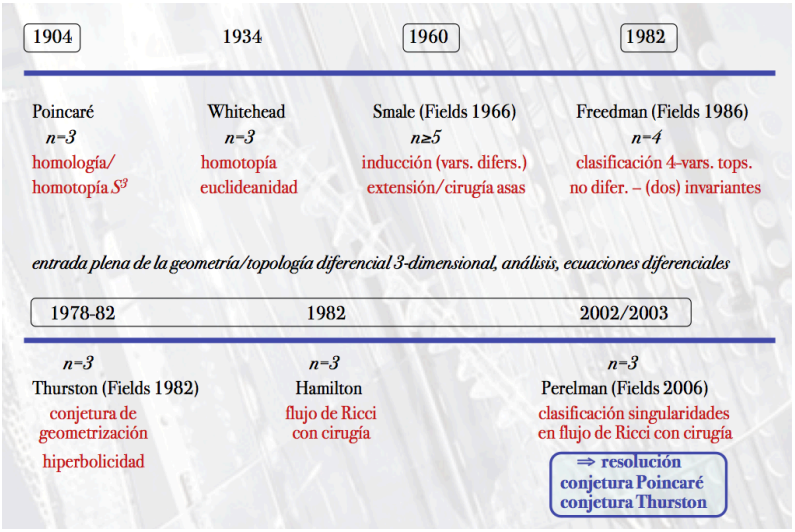
¿caracterizaciones?

(1) la homología no caracteriza al espacio
(Esfera de Poincaré)

(2) la homotopía podría caracterizarlo
(Conjetura de Poincaré)

$S^3 \subseteq R^4$	variedad tridimensional cerrada	grupo fundamental trivial
$S^n \subseteq R^{n+1}$ $(n \geq 3)$	variedad n-dimensional compacta	equivalencia homotópica

Cronograma de la(s) prueba(s) de la conjetura extendida



Mayo 31
Física Matemática

["La física matemática y el análisis puro no son solo potencias limítrofes, que mantienen relaciones de buena vecindad: se penetran mutuamente y su espíritu es el mismo*", El valor de la ciencia*, 1905].

Enseñanza / Notas de Cursos

Cátedras en la Sorbona:

- Mecánica Física y Experimental (1885-1886): frotamiento, cinemática, potencial, hidrostática, hidrodinámica.
- Física Matemática (1887-1896): potencial, teoría del calor, teoría de la luz, teoría de Maxwell, termodinámica, capilaridad, problema de los tres cuerpos, electrodinámica, elasticidad, electrostática, óptica, torbellinos, oscilaciones eléctricas, cálculo de probabilidades.
- Mecánica Celeste (1897-1901): problema de los tres cuerpos, función perturbatriz, nuevas teorías electrodinámicas, figuras de los cuerpos celestes, teoría de la luna, movimientos de los cuerpos celestes.

Otros trabajos

(citas tomadas de una carta a Gaston Darboux, c. 1909 [en: Samueli & Boudenot, *H. Poincaré*, 2005, pp. 14-17])

"Ecuaciones de la Física Matemática"	"Demostré las ventajas de introducir un parámetro con respecto al cual la solución se expresa por una función meromorfa". "Indiqué varias soluciones del problema de Dirichlet; mostré la generalidad y el verdadero significado (...)".
"Ondas Hertzianas"	"Mostré por vez primera que ciertas contradicciones se explicaban por la amortiguación de las ondas". "El papel de esa amortiguación es por otro lado capital en la teoría de la telegrafía sin hilos". "Introduje por vez primera (o entre los primeros, punto a verificar) la noción del potencial retardado".
"Conferencias Escuela Telegrafía"	"Integré la ecuación [de los telegrafistas] por un método general, aplicable a un gran número de preguntas análogas". "El resultado varía (...) y se traduce matemáticamente en cambios en las condiciones limítrofes". "Estudié el receptor telefónico (...) y el papel de las corrientes de Foucault en la masa del imán".
"Teoría Cinética de los Gases"	"Examiné y refuté ciertas objeciones hechas por Lord Kelvin al teorema de Boltzmann-Maxwell". "Concilié esa teoría con la irreversibilidad de los fenómenos, lo que es la gran dificultad, y para esclarecer la cuestión examiné lo que sucedería bajo diversas hipótesis, más o menos alejadas del caso natural (...)".
"Teoría de Lorentz"	"Mostré que [la teoría de Lorentz] era incompatible con el principio de igualdad entre acción y reacción, y cómo habría que modificar el principio para ajustarlo con esa teoría". "En el artículo (...) sobre la *Dinámica del Electrón*, he creído eliminar las últimas dificultades y darle una coherencia perfecta ".

Poincaré ha sido el científico con mayor número de nominaciones al Premio Nobel de Física (!) (1904, 1906, 1907, 1909-1912; por Becquerel, Darboux, Fredholm, Appell, Volterra, etc.). Según Mittag-Leffler, la comisión del Nobel estaba formada por "un conjunto de individuos que no entienden nada de teoría y que son todos incapaces de comprender siquiera una frase en los escritos populares de Poincaré" (carta a Painlevé, 3 febrero 1909 [en: Samueli & Boudenot, *H. Poincaré*, p. 110])

TEORÍA DE LA RELATIVIDAD

"Sobre la dinámica del electrón" (anuncio) [*CRAS* 140 (Junio 1905): 1504-1508]
"**Sobre la dinámica del electrón**" (artículo pleno) [*Rend. Circ. Mat. Palermo* 21 (1906): 129-176]

"Parece que esa imposibilidad de poner en evidencia experimentalmente el movimiento absoluto de la Tierra sea una ley general de la Naturaleza; nos vemos naturalmente llevados a admitir esa ley, que llamaremos el *Postulado de Relatividad*, y a admitirla sin restricciones" [*Oeuvres* 9, p. 495]

"Dos sistemas [de referencia], uno inmóvil, el otro en translación, se tornan *imágenes exactas* uno de otro" [*Ibid.*]

Centralidad de la noción de **GRUPO**: *inversión* ("exactitud") de las transformaciones de Lorentz

GRUPO DE POINCARÉ

ÁLGEBRA DE LIE DEL GRUPO DE POINCARÉ

- prueba de leyes de composición de velocidades (corrección a Lorentz)
- prueba de leyes de transformación de campos (eléctrico E y magnético B), potenciales y corrientes
- usos de notaciones en cuatro dimensiones
- aparición de invariantes relativistas ($E^2 - B^2$, $E.B$)
- consecuencias eventuales del Principio de Relatividad en gravitación

---

La emergencia de la relatividad especial: Poincaré *vs.* Einstein

	Poincaré (anuncio Junio 5 1905; envío Julio 23 1905; publicación Enero 1906)	*Einstein* (envío Junio 30 1905; publicación Septiembre 26 1905)
Matemática	- grupo de Lorentz (= grupo de Poincaré) - acción del grupo sobre variables electromagnéticas - descripción del álgebra de Lie del grupo - invarianza del intervalo de espacio-tiempo ✓	----------
Física	- trato "estándar" del tiempo (sincronizaciones $O(v^1)$: sin *dilatación*) - dudas sobre el principio de la relatividad ("tiempo verdadero" versus "tiempo aparente") - dudas sobre velocidad de la luz - "la energía no posee masa" (1908)	- revolución en el concepto de **TIEMPO** (*dilatación*: paradoja gemelos) - plena creencia en relatividad ("tiempo local como tiempo puro y simple") - invarianza velocidad luz - convertibilidad energía/masa ($E=mc^2$) ✓

[Thibault Damour, "Poincaré, Relativity, Billiards and Symmetry", 2004; Michel Le Bellac, "The Poincaré Group", 2006/2010]

SEMINARIO CONTINUO DE FILOSOFÍA DE LAS MATEMÁTICAS
2013-I – POINCARÉ

Junio 7
Filosofía de la Matemática

Citas referidas a la naturaleza del pensamiento matemático, que complementan "La invención matemática" (1908).

1. *La ciencia y la hipótesis* (1902).

- "Dudar de todo, o todo creer, son dos soluciones igualmente cómodas, que nos dispensan de reflexionar" [p. 2]. "Las convenciones son obra de la libre actividad de nuestro espíritu. (...) Esos decretos, sin embargo, ¿son arbitrarios? No, puesto que sino serían estériles" [p. 3]. "No podemos evitar ese instinto obscuro [del sentido común que nos orienta en las convenciones a tomar]; sin él la ciencia sería imposible" [p. 216]. "Lo que la ciencia puede alcanzar, no son las cosas en sí, como lo piensan los dogmáticos ingenuos, sino solo las relaciones entre las cosas; allende esas relaciones, no hay otra realidad cognoscible" [p. 4].
- "¿Cuál es la naturaleza del razonamiento matemático? ¿Es realmente deductivo como se cree usualmente? Un análisis profundo nos muestra que no es así para nada (...)" [p. 4]. "Si las matemáticas no tuviesen sino instrumentos puramente analíticos, se detendrían inmediatamente en su desarrollo; pero recurren de nuevo al mismo procedimiento, es decir, al razonamiento por recurrencia, y pueden continuar su marcha hacia adelante" [p. 19].
- "El carácter esencial del razonamiento por recurrencia es que contiene, condensados por así decir en una fórmula única, una infinitud de silogismos" [p. 20]. "La idea de infinito matemático juega un papel preponderante, y sin ella no habría ciencia puesto que no habría nada general" [p. 22]. "La regla del razonamiento por recurrencia (...) inaccesible a la demostración analítica y a la experiencia, es el verdadero tipo de juicio sintético *a priori*" [p. 23].
- "*Los axiomas geométricos no son ni juicios sintéticos a priori, ni hechos experimentales*. Son *convenciones*; nuestra escogencia, entre todas las convenciones posibles, está *guiada* por hechos experimentales; pero permanece *libre* y solo está limitada por la necesidad de evitar toda contradicción" [p. 66].

2. *El valor de la ciencia* (1905).

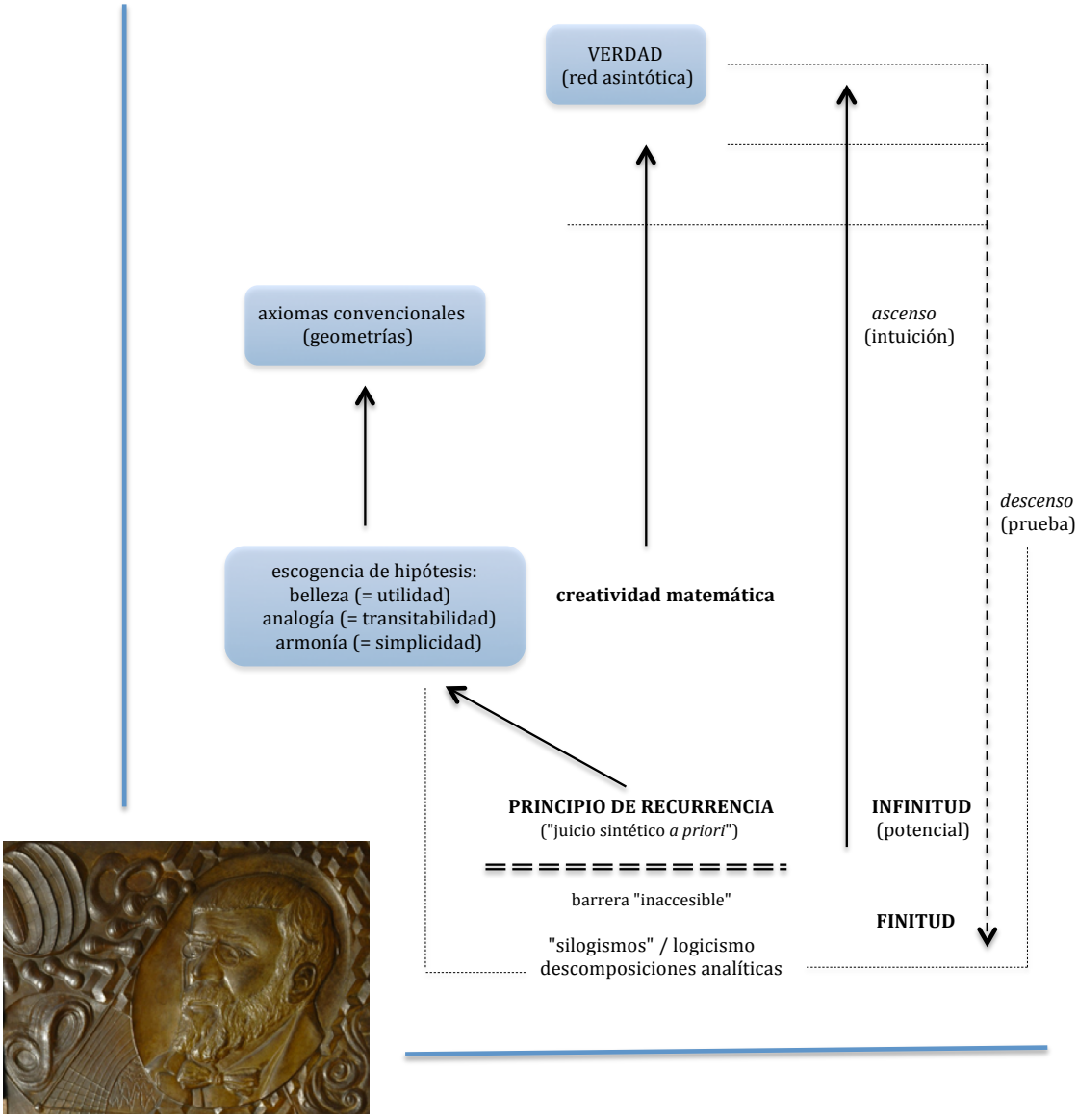
- "La investigación de la verdad debe ser el único objetivo de nuestra actividad (...) Sin embargo, a veces la verdad nos asusta. En efecto, sabemos que a veces nos decepciona, que es un fantasma que solo se muestra un instante para luego escapar sin descanso, que hay que perseguirla más y más lejos, sin nunca poder alcanzarla. (...) No obstante, no debemos tener miedo de la verdad, pues solo ella es bella" [pp. 1-2].
- "El análisis matemático, cuyo objetivo principal es el estudio de cuadros vacíos, ¿no es entonces sino un vano juego del espíritu? (...) Lejos de eso, sin ese lenguaje, la mayoría de las analogías íntimas de las cosas habrían permanecido siempre desconocidas; y habríamos siempre ignorado la armonía interna del mundo, algo que es, como veremos, la única verdadera realidad objetiva" [pp. 6-7]. " (...) la armonía universal del mundo es la fuente de toda belleza (...)" [p. 10]. "La Ciencia de la demostración no es la Ciencia entera y la intuición debe conservar su papel como complemento, iba a decir como contrapeso, o como contraveneno, de la lógica" [p. 25]. "Nos hace falta una facultad que nos permita ver de lejos, y esa facultad es la intuición (...) [para] percibir la razón íntima (...) [de] un todo organizado" [p. 27]. "La lógica y la intuición tienen cada una su papel necesario. Ambas son indispensables. La lógica, única que puede dar la certeza, es el instrumento de la demostración; la intuición es el instrumento de la invención" [p. 29].
- "En un continuo, primitavemente amorfo, puede imaginarse una red de líneas y superficies, y puede luego convenirse mirar las mallas de esa red como iguales entre sí, [hasta determinar] el espacio euclideano o el espacio no euclideano" [pp. 59-60].
- "Las matemáticas tienen un triple objetivo. Deben proveer un instrumento para el estudio de la naturaleza. Pero eso no es todo: tienen un objetivo filosófico y, me atrevo a decirlo, un objetivo estético" [p. 139].

3. *Ciencia y método* (1908).

- "Es la búsqueda de esa belleza especial –el sentido de armonía del mundo– la que nos hace escoger los hechos más apropiados para contribuir a la armonía (...) Y ya que la simplicidad y la grandiosidad son bellas, buscamos de preferencia los hechos simples y grandiosos (...) Se ve que la preocupación por lo bello nos lleva a las mismas escogencias que la preocupación por lo útil " [p. 16].
- "El verdadero inventor no será el obrero que haya pacientemente edificado algunas combinaciones, sino aquel que ponga en evidencia su parentezco. El primero no habrá visto más que el hecho en bruto, solo el segundo habrá sentido el alma del hecho" [p. 23]. "Para obtener un resultado que tenga un valor real, no basta con moler cálculos o poseer una máquina que ponga las cosas en orden; no es solo el orden, sino el orden inesperado el que vale algo" [p. 27].
- "A medida que se desarrolla la ciencia, es más difícil abrazarla entera; se procede entonces a cortarla en pedazos, a contentarse con un pedazo: en una palabra, a especializarse. Si se continuase así, sería un fastidioso obstáculo para el progreso de la Ciencia. Lo hemos dicho, es gracias a acercamientos inesperados entre sus diversas partes cómo esos progresos pueden darse. Especializarse demasiado llevaría a prohibir esos acercamientos" [p. 35].
- "*Las definiciones que deben ser vistas como no predicativas son aquellas que contienen un círculo vicioso*" [p. 207]. "*No hay infinito actual*; los Cantorianos lo olvidaron, y cayeron en la contradicción" [p. 212].

RED CONCEPTUAL

["NO: una sílaba que contiene la promesa de la creación", George Steiner, *La poesía del pensamiento* (2011)]

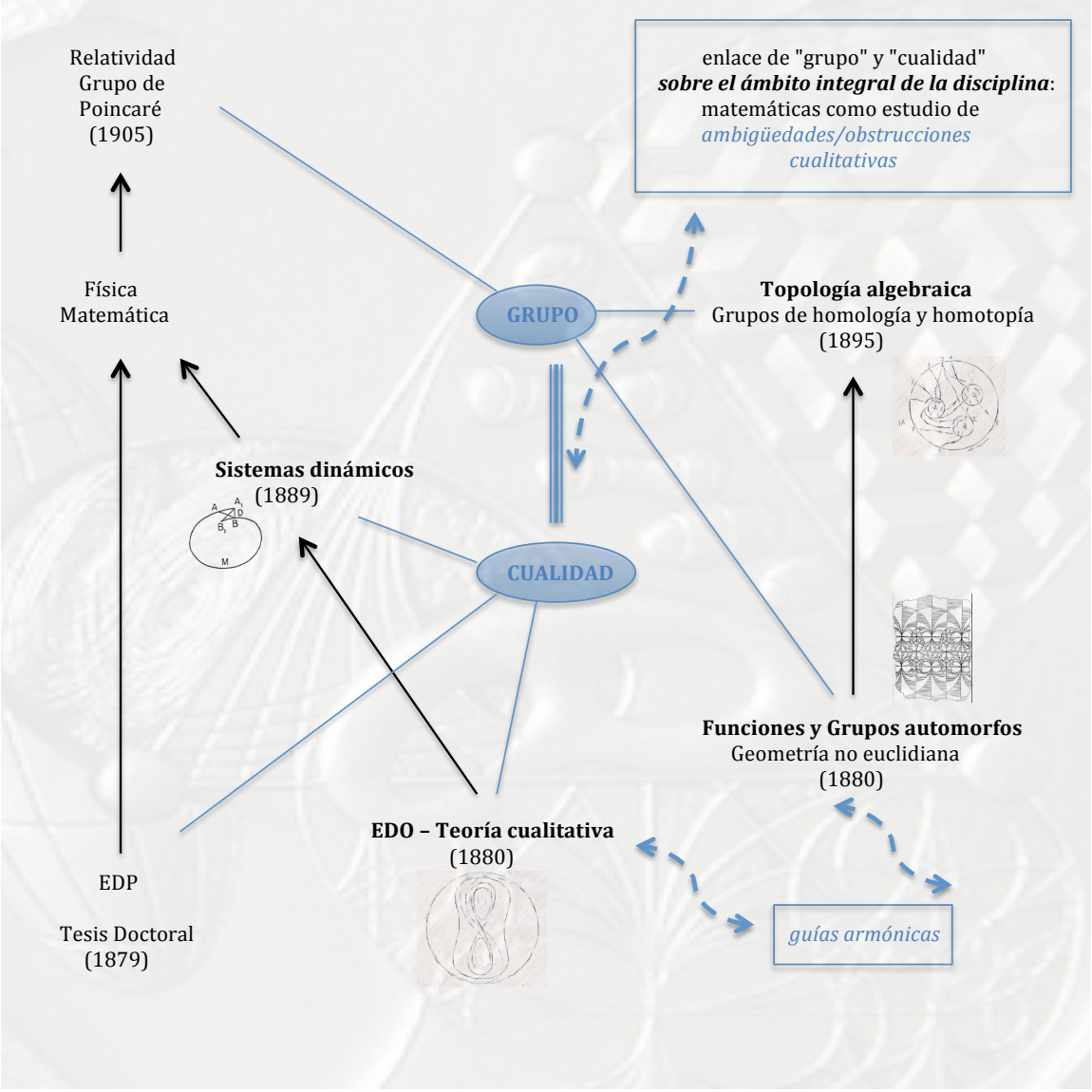


Alguna bibliografía secundaria:

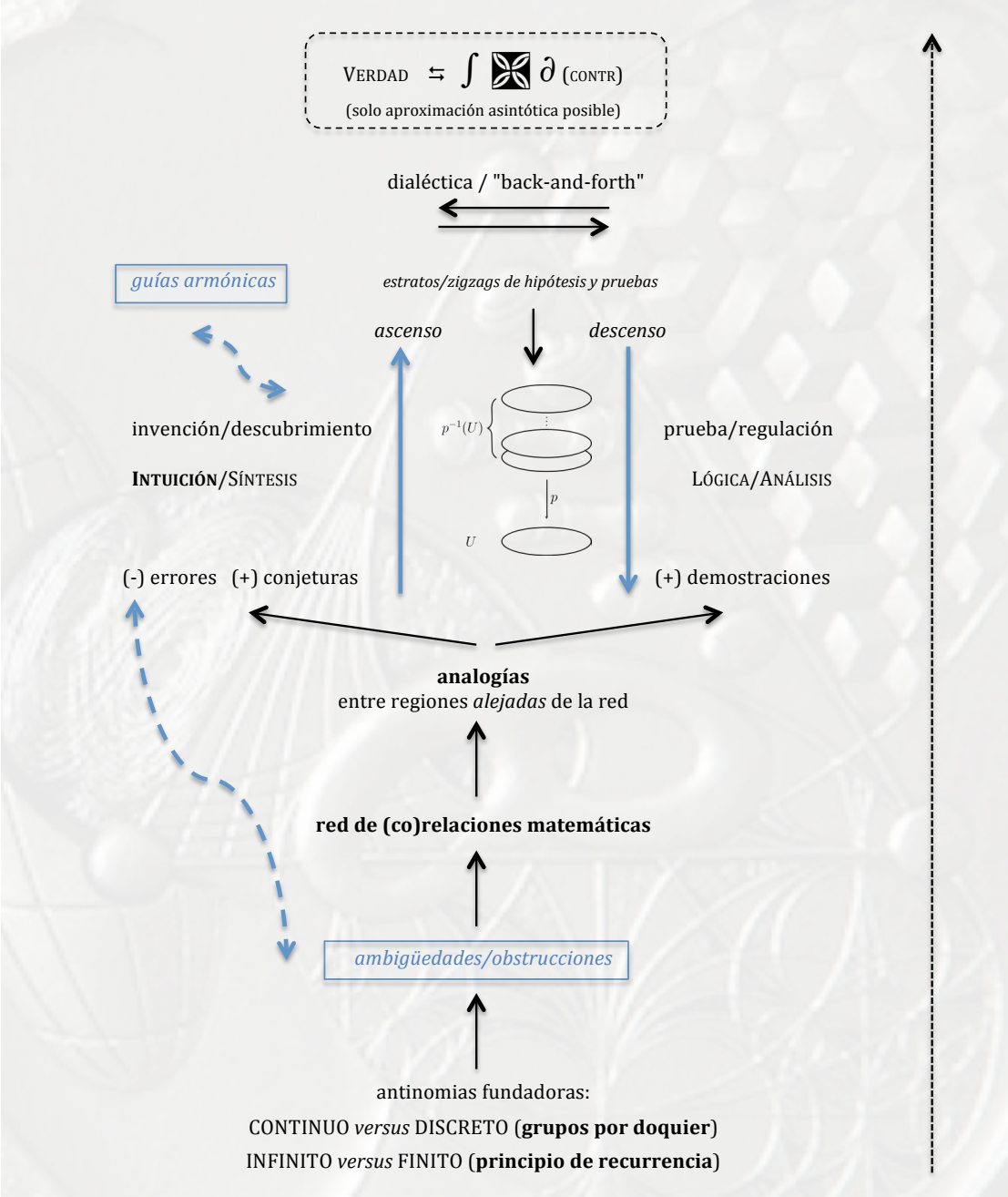
Javier de Lorenzo, *La filosofía de la matemática de Jules Henri Poincaré*, Madrid: Tecnos, 1974;
Anne-Françoise Schmid, *Henri Poincaré. Les sciences et la philosophie*, París: L'Harmattan, 2001;
Xavier Verley, *Poincaré ou le renouveau de la philosophie naturelle*, París: Les Belles Lettres, 2009.

Junio 14
Diagrama de la creatividad en Poincaré

(I) LA RED MATEMÁTICA



(II) LA RED METODOLÓGICA

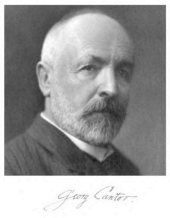


Russell sobre Poincaré: "(...) el científico más eminente de su generación (...) encontramos rapidez, visión integral, lucidez sin par, y la percepción de recónditas y fértiles analogías (...) activa y ávida duda que inspira nuevos escrutinios (...) mente original y potente (...)" [Bertrand Russell, "Prefacio" a la traducción inglesa de *Ciencia y Método*, 1914].

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA – SEDE BOGOTÁ – DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

EPISTEMOLOGÍA E HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS
SEMINARIO CONTINUO DE FILOSOFÍA DE LAS MATEMÁTICAS
2013-II
SALONES 404-212 (Vi) / 405-310 (Mi)

CANTOR







"(...) tras lo finito hay un *transfinito* (que se podría llamar también *suprafinito*) (...) donde los límites de nuestro conocer pueden ser extendidos (...) en una ilimitada capacidad para la formación progresiva de clases numéricas (...) cuyas *potencias* son de intensidad creciente" [Cantor, 1883]

Programa reorganizado después de los bloqueos de agosto-septiembre

1	*(14 ago)*	*Mapa del seminario: análisis, infinitud, fundamentos.*
2	*(16 & 21 ago)*	*Conjuntos de puntos y topología: grandes conceptos y problemas.*
3	*(20 & 25 sep)*	*Conjuntos abstractos y esqueletos (ordinales, cardinales): grandes conceptos y problemas.*
4	*(27 sep & 2 oct)*	*1870: el entorno filosófico, técnico y biográfico.*
5	*(25 & 30 oct)*	*Series trigonométricas y topología de conjuntos de puntos (1870-1872, 1879-1884).*
6	*(1 & 6 nov)*	*Enumerabilidad y dimensión. Primera correspondencia: Dedekind (1872-1877).*
7	*(8 & 13 nov)*	*Grundlagen: fundamentos para una teoría general de conjuntos (1883).*
8	*(15 & 20 nov)*	*Mitteilungen: historia y filosofía (1887-1888). Perfección (1884). Diagonalización (1891).*
9	*(22 & 27 nov)*	*Beiträge: fundamentos de la teoría de los conjuntos transfinitos (1895-1897).*
10	*(29 nov & 3 dic)*	*Multiplicidades inconsistentes. Segunda correspondencia: Dedekind, Hilbert (1897-1899).*
11	*(6 dic)*	*Diagrama de la creatividad en Cantor.*

	viernes	miércoles subsiguiente
14.00-16.00	presentación del coordinador	presentaciones de estudiantes y complementos

Prerrequisitos.
Pregrado de Matemáticas: madurez matemática, tipo *Grupos y Anillos*, *Topología* o equivalente. Posgrado de Matemáticas: abierto. Otras Carreras y Posgrados, acercarse a discutir la idoneidad (o no idoneidad) con el instructor.

Evaluación.
Cada estudiante inscrito al **curso** *Epistemología e historia de las matemáticas* deberá proponer, a mediados de semestre, el tema de un ensayo escrito (E), que desarrollará en la segunda mitad del semestre, y obtendrá también una nota de participación (P), asociada a las presentaciones complementarias de los días miércoles. La nota final del curso se obtendrá mediante la fórmula 0.3P + 0.7E.

Bibliografía.

Georg Cantor, *Gesammelte Abhandlungen* (ed. Zermelo), Berlín: Springer, 1932.
Georg Cantor, *Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers* (ed. Jourdain), New York: Dover, 1955.
Georg Cantor, *Oeuvres traduites en français (1883-1899)* (ed. Dugac), Mimeografo, BNF, s.f. (c. 1970).
Georg Cantor, *Fundamentos para una teoría general de conjuntos* (ed. Ferreirós), Barcelona: Crítica, 2006.
Georg Cantor, *Sistema de números y conjuntos* (ed. Gómez Bermúdez), Coruña: Universidade de Coruña, 2009.
Georg Cantor, *La formazione della teoria degli insiemi (Scritti 1872-1899)* (ed. Rigamonti), Milano: Mimesis, 2012.

Fernando Zalamea - Oficina: 405-327 - Tel. (oficina): 3165000-13214
Mail: fernandozalamea@gmail.com - Web: www.docentes.unal.edu.co/fzalameat/

SEMINARIO CONTINUO DE FILOSOFÍA DE LAS MATEMÁTICAS
2013-II – CANTOR

Agosto 16
Conjuntos de puntos y topología:
grandes conceptos y problemas

(I) ANÁLISIS DE SERIES TRIGONOMÉTRICAS

Resultados previos: **existencia** de la representación de una función *f(x)* (periódica) por series trigonométricas

Tesis de Habilitación de Riemann (1854): introducción de inversión auxiliar *F(x)*;
resolución en el caso de funciones con *finitos* máximos y mínimos

---

Problema: **unicidad** de la representación de una función por series trigonométricas

Heine (1870): caso de función continua, con serie uniformemente convergente (excepto *finitos* puntos)

Cantor (1870): ampliación de casos, vía prueba de *F(x)* lineal;

casos con **INFINITOS** conjuntos excepcionales de puntos:

(1871): caso sin condiciones de convergencia en infinitos puntos (bien distribuidos)

(1872): **FUNDAMENTOS** necesarios para poder describir los conjuntos excepcionales
- teoría de irracionales y reales vía sucesiones y "límites" (λ niveles convencionales)

- extensiones de conjuntos de números:
conjuntos derivados de primera especie y de segunda especie

Teorema de unicidad para representación de funciones por series trigonométricas:
caso de conjuntos excepcionales derivados de primera especie

La fuerza del análisis:

descomposiciones iteraciones sucesiones simbologías extensiones

El poder de la autorreferencia (diagonalización I):

LIM(LIM)

[el buzo sumergiéndose en las profundidades,
a la búsqueda de las constituyentes de la expresión]

(II) TOPOLOGÍA DE CONJUNTOS DE PUNTOS

Serie de 6 artículos (1879-1884): *Sobre variedades lineales infinitas de puntos*

(Art. 1º, 1879): continuo ligado a conjuntos derivados;
clasificación de conjuntos de puntos:
primera especie, segunda especie, densidad en todas partes;
potencias de conjuntos

(Art. 2º, 1880): continuo ligado a descomposiciones disyuntas de derivados;
generaciones "dialécticas" y sucesiones infinitas de "conceptos";
los **SÍMBOLOS INFINITOS**: gérmenes de los números transfinitos

(Art. 3º, 1882): dominios multidimensionales;
potencia y enumerabilidad;
especulaciones de aplicaciones a la Naturaleza

(Art. 4º, 1883): conjuntos **aislados y de contenido cero**;
conjuntos derivados y enumerabilidad

(Art. 6º, 1884): conjuntos **perfectos, densos en sí mismos, separados**;
descomposiciones y conexiones con enumerabilidad

[El Art. 5º, "Fundamentos para una teoría general de conjuntos" (1883) merece un estudio aparte]

Clasificación de conjuntos de puntos por sus propiedades topológicas

La fuerza de la topología:

descomposiciones, iteraciones, extensiones ***cualitativas***

El poder de la autorreferencia (diagonalización II):

CUAL(CUAL)

[el buzo observando el panorama de las profundidades:
a la búsqueda de las correlaciones de la expresión]

Los trabajos de Cantor sobre *(I) series trigonométricas* y *(II) variedades lineales infinitas de puntos*
proveen las bases de la emergente REVOLUCIÓN CANTORIANA:

- clas(r)ificación natural de la infinitud y clas(r)ificación topológica de la continuidad
- aparición de la noción abstracta de conjunto y detección del problema de los fundamentos
- invención de los símbolos infinitos (= números transfinitos, en el paso de lo "ideal" a lo "real")

SEMINARIO CONTINUO DE FILOSOFÍA DE LAS MATEMÁTICAS
2013-II – CANTOR

Septiembre 20
Conjuntos abstractos y esqueletos (ordinales, cardinales):
grandes conceptos y problemas

PROBLEMA CENTRAL:
ENTENDIMIENTO DEL

CONTINUO

TOPOLOGÍA [1870-1884]
mediante conjuntos lineales ($\subseteq \boldsymbol{R}$) de puntos:
- conjuntos derivados, $\boldsymbol{Q}' = \boldsymbol{R}$
- perfección y conexidad

EQUIVALENCIA [1873-1878]
mediante similitudes ($\sim$) y potencias ($\wp$):
- no ($\boldsymbol{R} \sim \boldsymbol{N}$)
- $\boldsymbol{R} \sim \wp(\boldsymbol{N})$
- $\boldsymbol{R}^n \sim \boldsymbol{R}$

ORDEN [1883-1897]
mediante abstracción y orden:
- tipos de orden
- generación (sucesores, supremos, limitaciones)
- ordinales y cardinales
- primera (I) y segunda clase (II)

ESQUELETIZACIÓN [1897-1899]
mediantes esqueletos infinitos:
- alephs
- multitudes inconsistentes
- hipótesis del continuo (HC, forma algebraica):

$$c = 2^{\aleph_0} = \aleph_1$$

---

problema grave: la exponencial infinita más sencilla posible resulta "superar" a la teoría de conjuntos

- control inicial básico de la exponencial:
  Zermelo (1904-1908) : elección, teorema de buen orden, axiomas (ZF)

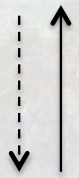
- resultados de consistencia relativa:
  Gödel (1938) : Con(ZF) $\Rightarrow$ Con(ZF + HC)
  Cohen (1963) : Con(ZF) $\Rightarrow$ Con(ZF + no HC)

- búsqueda de los "fondos" del entendimiento:
  Woodin (2000) : dada Con(ZF), búsqueda de axiomas "naturales" que fuercen $2^{\aleph_0} = \aleph_2$

GRANDES PROBLEMAS FILOSÓFICOS ASOCIADOS

1. Lo continuo obtenido vía límites (enumerables) de lo discreto:
CONT ≡ $\int$ DISCR
Iteraciones y procesos diagonales lim(lim(lim...) existenciales

2. Un profundo ***descenso*** hacia lo "último" desea asegurar un ***ascenso*** posterior

MATEMÁTICA 

CONJUNTOS (+ Lógica Clásica Primer Orden: entornos de 1920)

[extraña aberración cantoriana: en el descenso no se permiten infinitesimales ("bacilo de la cólera")]

3. El "medio" ***topológico*** querría ser controlable mediante "fondos" ***ordenados***:
parece irrazonable conseguirlo y es lo que ha logrado *demostrar* el siglo XX

4. El método ***analítico*** (axiomas de ZF) querría controlar un método ***sintético*** (exponencial):
parece igualmente irrazonable conseguirlo y es lo que parece *indicar* el siglo XX

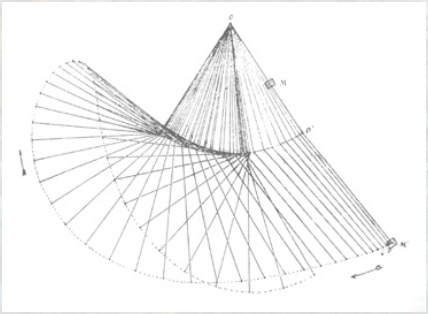
Cada una de las perspectivas 1-4 tiene contraparte(s) alternativa(s) (RELATIVIDAD DE LA MATEMÁTICA):

1alt. DISCR ≡ ∂ CONT – Cortes y procesos no autorreferenciales constructivos
[Brouwer, intuicionismo]

2alt. No hay descensos últimos, ni fundamentos, sino redes densas "en el aire"
[práctica diaria del matemático]
[los infinitesimales pueden pensarse consistentemente: Robinson, teoría de modelos, 1960]

3alt. Un "medio" algebraico puede ser controlado mediantes "fondos" topológicos
[Voevodsky, motivos; Petitot, protogeometría]

4alt. Puede procederse sintéticamente, con independencia del análisis
[Grothendieck, categorías, topos, esquemas: extensiones del número y el espacio]



Septiembre 27
1870: entornos técnico, filosófico y biográfico

(A) El entorno técnico

Influencia

(a) Escuela alemana de teoría de funciones: Riemann, Kummer, Weierstrass, Heine.

(b) Contemporáneo conjuntista: Dedekind.

(c) Correspondencia con Klein, Mittag-Leffler, Hilbert.

(d) Contradictores constructivistas: Kronecker, Poincaré.

Herencia

(1) Un solo tesista doctoral (Barneck, 1910).

(2) Corresponsales ingleses: matrimonio Young (primer texto sobre conjuntos, 1906), Jourdain.

(3) Gran discípulo indirecto: Zermelo. Gran contemporáneo indirecto: Hilbert.

(4) Escuelas extranjeras: francesa (Jordan, Borel, Lebesgue, Hadamard), rusa (Luzin), polaca (Sierpinski).

(5) Gigantesca reconstrucción de la matemática dentro de la teoría de conjuntos (siglo XX).

(6) Borges: *El aleph* – Mitologías literarias e intelectuales asociadas.

(B) El entorno filosófico y teológico

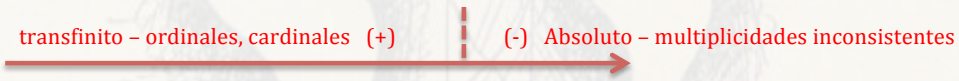
(e) Profesores directos: Trendelenburg, Lotze (romanticismo post-idealista, no materialista).

(f) Metafísica e Infinitud (actual): Platón, Agustín, Cusa, Bruno, Pascal, Spinoza, Leibniz, Bolzano.

(g) Teología (especulación católica, criado protestante, abuelos judíos): lo transfinito y lo Absoluto.

Propuestas centrales

(A) Arte de la **iteración**: lo *máximo negativo* se aproxima por medio de esqueletos positivos



(B) Arte de la **diagonal**: las *limitantes estructurales* aseguran el *crecimiento orgánico* del universo

(C) Arte de la **descomposición**: allende *obstrucciones naturales*, los *refinamientos* –recubrimientos topológicos (derivados) y algebraicos (exponencial)– deben proveer las claves del *continuo*

(C) El entorno biográfico

fecha	*vida*	*obra*
1845 (3 mar)	Nacimiento en San Petersburgo	
1856	Traslado de la familia a Frankfurt	
1859-1862	Enseñanza media y escuela industrial (Darmstadt)	
1862	Carta al padre (vocación matemática) y Universidad (Zürich)	
1863-1866	Estudios en Berlín (bajo Kummer, Kronecker, Weierstrass)	
1867	*Doctorado* en Berlín (ecuaciones de 2º grado indeterminadas)	
1869	*Habilitación* en Halle (formas cuadráticas ternarias)	
1870	Encuentro con Heine Publica en el *Journal* de Crelle (Kronecker)	Unicidad representación por series trigonom.
1872	Comienzo de amistad y correspondencia con Dedekind	Números reales - Generalización representación por series trigonom. (vía conjuntos derivados)
1874	Matrimonio con Vally Guttmann (seis hijos: 4M, 2F)	*... Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen* (no enumerabilidad de los reales)
1878		***Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre*** (tamaño, similaridad, dimensión, $\boldsymbol{R^n \sim R}$)
1879	Publica en *Mathematische Annalen* (Klein) [*corazón* de los conjuntos y la infinitud]	Serie de 6 artículos: ***Ueber unendliche, lineare Punktmannigfaltigkeiten*** (derivados, especies, símbolos infinitos, perfectos, potencias, medida)
1883		***Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre*** [Fundamentos para una teoría general de conjuntos]
1884	Primera crisis nerviosa (maníaco-depresivo)	Intentos sobre HC (inéditos)
1883-1884	Traducciones (francés) *Acta Mathematica* (Mittag-Leffler)	
1885	Reconocimiento del Vaticano (Cardenal Franzelin)	Teoría de tipos de órdenes (inédito)
1887		***Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten*** (defensa filosófica de su sistema)
1890	Propulsor de la DMV (Sociedad Matemática Alemana)	
1891		Prueba diagonal general
1895-1897	Contribuciones matemáticas finales (*Mathematische Annalen*)	***Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre (I, II)*** [Contribuciones a la fundamentación de la teoría de los conjuntos transfinitos]
1897-1904	Propulsor de los Congresos Internacionales de Matemáticas	
1899	Correspondencia con Dedekind, Hilbert	Multiplicidades inconsistentes (inédito)
1899	Muerte de su hijo Rudolf	
1884-1917	Controversia sobre la identidad de Shakespeare (= F. Bacon?)	
1904-1908	Teorema de Buen Orden y Axiomatización de Zermelo	
1913	Retiro de la Universidad (44 años ejercidos en Halle)	
1902-1917	Hospitalizaciones recurrentes (*Nervenklinik*, Halle)	
1918 (6 ene)	Fallecimiento (infarto probable)	

Octubre 25
Series trigonométricas, topología y conjuntos lineales de puntos

---

(A) Series trigonométricas

[1870a] *Acerca de un teorema referente a las series trigonométricas* (10 pp.)

[1870b] *Demostración de que una función f(x) dada por medio de una serie trigonométrica, para todo valor real x, sólo puede representarse en esta forma de una única manera* (5 pp.)

[1871a] *Nota al artículo anterior* (3 pp.)

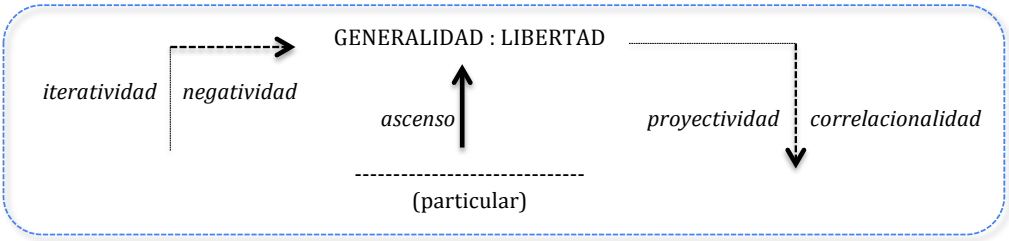
[1871b] *Sobre series trigonométricas* (6 pp.)

[1872] ***Sobre la generalización de una proposición de la teoría de series trigonométricas*** (11 pp.)

[1880] *Observaciones sobre series trigonométricas* (5 pp.)

artículo	*contenido matemático*	*conceptos metodológicos/filosóficos*
[1870a]	Objetivo: generalización teorema de representación de Riemann (pp. 3, 4). Representaciones de sucesiones (pp. 4, 6). Densidad de sucesiones (p. 7). Convergencia a cero (pp. 8, 9). Aplicación a *nulidad* (en el límite) de coeficientes de series trigonométricas (pp. 9-12).	descomposición iteración densidad
[1870b]	Continuación del artículo anterior. Estudio de la función *F(X)* de Riemann asociada a una serie trigonométrica (pp. 16-18). Linealidad de *F* en todo el dominio de definición (p. 18). Aplicación a *unicidad* en la representación de series trigonométricas (p. 19).	linealización y reflexión (positiva) pasaje acotado local/global (integración término a término)
[1871a]	Simplificación de [1870a] según "amable indicación verbal del Señor Profesor Kronecker" (p. 21). Unicidad por fuera de un conjunto excepcional (*finitas obstrucciones en intervalos finitos*) (pp. 22-23).	reconocimento del no (excepción finita) resolubilidad de finitas obstrucciones
[1871b]	Nueva reescritura y reordenamiento de [1870a].	
[1872]	Objetivo: unicidad por fuera de un conjunto excepcional *infinito* (p. 34). *Signos* de extensiones de números mediantes sucesiones (p. 35). Linealidad y operaciones algebraicas en las *extensiones* (pp. 35-36). *λ-iteraciones* de las extensiones (pp. 37-38). Continuo numérico ("Wertmenge", conjunto de valores) y continuo geométrico ("Punktmenge", conjunto de puntos) (pp. 38-40). Puntos "límite" (= de *acumulación*) (p. 40). Conjuntos *derivados* (ν-especie) (pp. 40-41). *Unicidad* por fuera de un conjunto derivado de ν-especie (pp. 41-44).	estructuración del no (excepción infinita) iteración de signos iteración de conjuntos dialéctica número / espacio axioma de enlace sintaxis / semántica (signos numéricos / puntos geométricos) linealización y reflexión (negativa)
[1880]	Referencias a problemas de convergencia (no) uniforme en comentarios o proposiciones aledañas a los trabajos de Cantor: Appell (pp. 46-47), du Bois-Reymond (pp. 48-49), Stolz (pp. 48-49), Darboux (p. 50).	fronteras del no (convergencia no uniforme)

[las referencias de páginas remiten a la compilación *Sistema de números y conjuntos* (Bermúdez, ed.)]



(B) Topología y conjuntos lineales de puntos

Serie de seis artículos (*Ueber unendliche, lineare Punktmannigfaltigkeiten*)

[1879] ***Sobre variedades lineales infinitas de puntos 1*** (7 pp.)

[1880] ***Sobre variedades lineales infinitas de puntos 2*** (4 pp.)

[1882] ***Sobre variedades lineales infinitas de puntos 3*** (10 pp.)

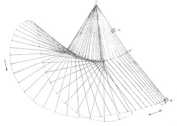
[1883] ***Sobre variedades lineales infinitas de puntos 4*** (8 pp.)

El quinto artículo (*Grundlagen*, 1883) y el sexto artículo (1884) constituyen un trabajo "conexo y continuo" que estudiamos más adelante.

artículo	*contenido matemático*	*fondo metodológico/filosófico*
[1879]	Objetivo: *clasificación* de fragmentos del continuo (p. 121). Conjuntos derivados: *especies y géneros* (p. 122). *Densidad* por doquier (pp. 122-123). *Potencia* (p. 123). *Enumerabilidad*: racionales, algebraicos (p. 124). Intervalos continuos y *no enumerabilidad de (0,1)* (pp. 124-127).	descomposición analítica del continuo iteración densidad correlacionalidad sintética del continuo
[1880]	Notaciones de uniones, intersecciones, vacío (p. 130). "Equivalencia" (*equipotencia*) (p. 131). *Descomposición* de los derivados (pp. 131-132). *Emergencia de los símbolos transfinitos* (pp. 132-133) y "forma normal" (p. 133).	descomposición negación: restos (finitud e infinitud) "generación dialéctica de conceptos"
[1882]	Continuo *n*-dimensional (p. 138). "Buena definición" y tercio excluso (p. 139). Origen del término "potencia" (pp. 140-141). Enumerabilidad (pp. 141-142). Enumerabilidad de la descomposición *disconexa* del continuo en subcontinuos (pp. 142-143). Continuidad y conexidad del plano excepto un conjunto enumerable (pp. 143-145). *Continuidad local* (desplazamiento) versus continuidad global (p. 147).	hipótesis de determinación de conjuntos dialécticas (interno / externo; cont / discont) conexión número / espacio: "acto libre de nuestra actividad de construcción mental" revisión de la mecánica
[1883]	Nuevas notaciones para uniones y diferencias (p. 149). Conjunto *aislado* (p. 149). Enumerabilidad de ciertas descomposiciones derivadas (pp. 150-152). *Linealidad, topología y medida*: medida nula de un conjunto cuyo derivado es enumerable (pp. 152-156).	enlace análisis / síntesis (descomposición / potencia) enlace cualidad / cantidad (topología / medida)

[las referencias de páginas remiten a la compilación *Sistema de números y conjuntos* (Bermúdez, ed.)]

CONTINUO



interno	*externo*
derivados	potencias
iteraciones	cirugías
operatorias conjuntistas	[operatorias algebraicas]

propiedades emergentes: *densidad, (no) enumerabilidad, conexidad, medibilidad*

"ángel de la topología" ⇄ "diablo del álgebra"

[Weyl 1939]

Noviembre 1
(No) enumerabilidad, equipotencia, dimensión

[1872-1874], [1877] ***Primera correspondencia con Dedekind*** (ed. Noether & Cavaillès 1937; preparada en 1933)

[1874] ***Sobre una propiedad de la colección de todos los números algebraicos reales*** (4 pp.)

[1878] ***Una contribución a la teoría de variedades*** (16 pp.)

[1879] *Sobre una proposición de la teoría de variedades continuas* (5 pp.)

texto	*contenido matemático*	*conceptos metodológicos/filosóficos*
correspondencia con Dedekind (selección)	28abr72(C→D). Primera carta ("diferencia en la *introducción conceptual* de las magnitudes numéricas") (p. 165). 29nov73(C→D). Pregunta: ¿el continuo es enumerable? (p. 166). Conjetura: no ("no logro encontrar la razón") (p. 167). 7dic73(C→D). *Primera prueba de que el intervalo (0,1) no es enumerable* (vía sucesiones crecientes, iteraciones, complementos e intervalos encajados) (pp. 168-170). 9dic73(C→D). Segunda prueba (densidad de contraejemplos) (p. 170). 5ene74(C→D). Pregunta: ¿cuadrado equipotente a línea? Tendencia: no, pero "ofrece graves dificultades" (p. 176). 20jun77(C→D). *Primera prueba de que superficies continuas de dimensión superior son equipotentes a líneas* (***[0,1]^m~[0,1]***) (vía expresiones decimales de reales y codificaciones de *n*-tuplas vía residuos módulo *n*) (pp. 188-190). 22jun77(D→C). Objeción: problemas en la representación generan posibles problemas en la biyección (pp. 190-191). 25jun77(C→D). *Segunda prueba* de que superficies continuas de dimensión superior son equipotentes a líneas (***[0,1]^m~[0,1]***) (vía expresiones fraccionales continuas de irracionales, codificaciones vía residuos, equipotencia de irracionales y reales, equipotencia de intervalo e intervalo excepto un punto) (pp. 192-196). *Problema de la dimensión* y especulaciones filosóficas (pp. 196-197). 29jun77(C→D). "*Je le vois mais je ne le crois pas*" (p. 198). Simplificaciones simbólicas de la prueba (pp. 198-200). 2jul77(D→C). Invarianza del número de dimensiones de una variedad continua (p. 201). Conjetura: la biyección de Cantor no puede ser continua (p. 202). 4jul77(C→D). Reconocimiento de la objeción de Dedekind (p. 203).	formas analíticas de diagonalización (iteración, encaje) formas analíticas de codificación (fracciones continuas, residuos) formas negativas del infinito (disyunciones, residuos)
[1874]	*Enumerabilidad de la colección de números algebraicos* (reales) (siguiendo "altura" de Dedekind) (pp. 78-79). *No enumerabilidad de intervalos continuos* (retoma la carta a Dedekind del 9dic73) (pp. 79-80). Enumerabilidad de extensiones racionales y referencia a Galois (p. 80).	
[1878]	*Prueba de que superficies continuas de dimensión superior son equipotentes a líneas* (***[0,1]^m~[0,1]***) (retoma la carta a Dedekind del 25jun77, introduce uso de operatorias conjuntistas) (pp. 97-109). *Descomposición conjuntista* de la prueba. Enumerabilidad de racionales (p. 101). Simplificación de la prueba original (p. 106). Falta de referencia a las cartas enviadas por Dedekind. Biyección *explícita* ***N^2~N*** (p. 108). *Hipótesis del continuo* (p. 109).	clasificación: primera aparición de la hipótesis del continuo
[1879]	Conjetura (sin referencia a Dedekind) de que una correspondencia entre variedades continuas de distinta dimensión es *totalmente discontinua* (p. 113). Problema de la dimensión relacionado con el *analysis situs* (p. 113). *Inmersión* entre variedades continuas dependiente de sus dimensiones ("método apartado de los caminos explorados hasta ahora") (p. 114).	dialéctica topológica variación / invarianza

[las referencias de páginas a la correspondencia con Dedekind remiten a *Fundamentos para una teoría general de conjuntos* (Ferreirós, ed.)]
[las referencias de páginas de artículos remiten a la compilación *Sistema de números y conjuntos* (Gómez Bermúdez, ed.)]

Esquema conceptual del descubrimiento

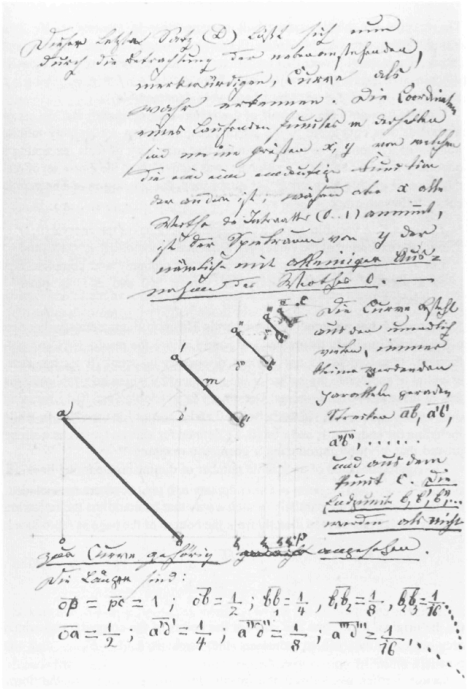
(A) ***plasticidad conceptual*** (dialéctica enumerable-continuo)

(B) ***potencia creativa del análisis*** (iteración, residuación)

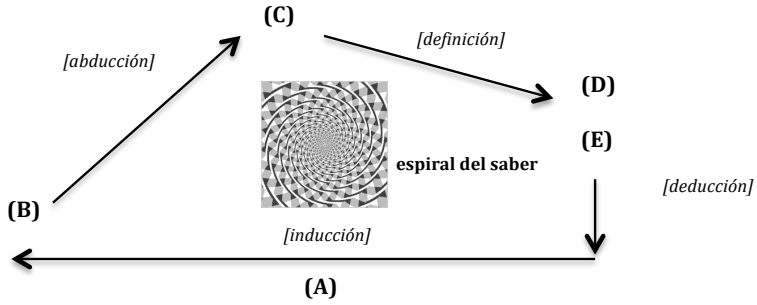
(C) ***plasticidad conjetural*** (péndulo indeterminado sí – no)

(D) ***plasticidad terminológica*** (variedad, colección, conjunto)

(E) ***potencia creativa del simbolismo*** (guías conjuntistas)







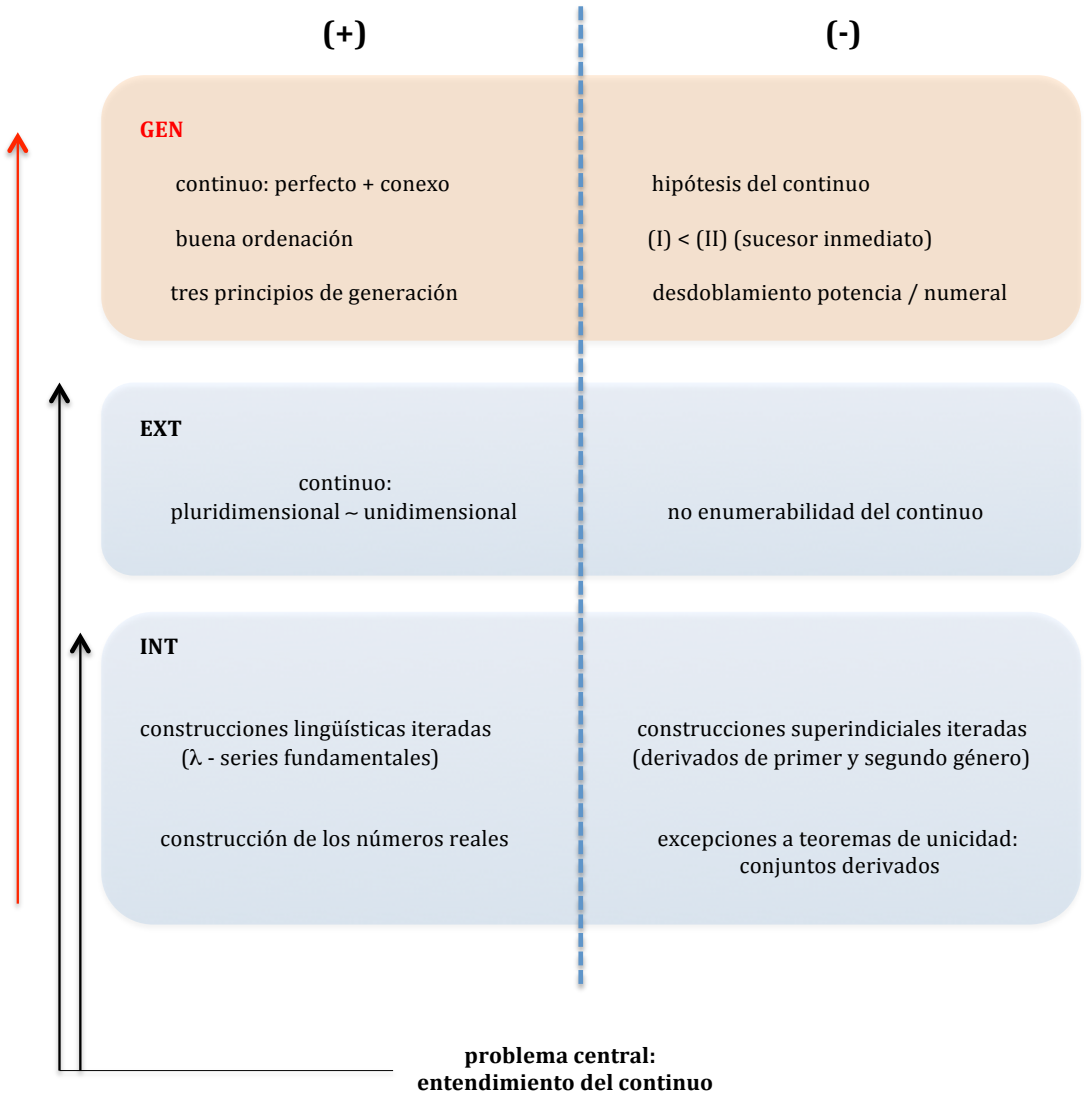
Noviembre 8
Grundlagen: fundamentos para una teoría general de conjuntos

[1883] *Fundamentos para una teoría general de conjuntos* (49 pp.)

(= Sobre variedades lineales infinitas de puntos 5)
(Publicado como folleto aparte: *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre*, Leipzig: Teubner, 1883)

contenido matemático	*conceptos metodológicos/filosóficos*
§1. Importancia del infinito propio ("números enteros reales infinitos"). Comparación con puntos en el infinito en variable compleja. Anuncios: tres principios de generación, potencias, numerales (= ordinales), clases de números (I)<(II) (inmediatamente superior).	actualización versus potencialidad
§2. *Buen orden* (vía inicial, sucesores y límites). Comparación entre buenos órdenes. *Infinitud: diferentes numerales*. Numerales de primera y segunda clase.	principios dialécticos de generación
§3. Afirmación: *teorema de buena ordenación* ("notable por su validez general"). Suma y multiplicación de numerales (*no conmutativas, asociativas*). Afirmación: "dentro de poco me será posible dar una fundamentación rigurosa" de la *hipótesis del continuo*. Conjuntos derivados como herramienta esencial.	emergencia definicional (adjetivación exacerbada)
§4. Confusión infinito impropio (variabilidad) / infinito propio (determinación). Polémica contra aquellos que limitan el entendimiento libre del infinito ("no les debemos ningún progreso verdadero"). Versus Aristóteles: "me he visto lógicamente obligado casi contra mi voluntad (...) [a introducir] números en forma de infinito matemático perfecto".	cubrimiento canónico y necesario del universo
§5. Referencias a formas de infinito impropio (Locke, Descartes, Spinoza, Leibniz, Hobbes, Berkeley). "Escala ilimitada de medidas determinadas infinitas": *Transfinitum* (= *Suprafinitum*). "La naturaleza humana tiene mucho de infinito". Definición de ω como primer número de (II).	escala ilimitada
§6. Fuerza de la generalización: "abandono de particularidades". Comparación: paso a los complejos y paso a los "nuevos números" infinitos. Propiedades aparentemente antinómicas de ω (par e impar, ni par ni impar).	singularidad de ω
§7. Leibniz al apoyo del infinito propio. "Bolzano es quizás el único para el que los números infinitos propios llegan a tener cierto derecho". Avances de la teoría de variedades con respecto a la teoría de funciones y a la *lógica*. *Infinito desdoblado en los dos conceptos de potencia y numeral*: "verdadero gozo al cual me entrego agradecido". *Ascenso y descenso entre finitud e infinitud*: visión de desdoblamiento y confluencia "con igual claridad y belleza".	riqueza infinitaria: desdoblamiento potencia / numeral
§8. *Realidad de los nuevos números: intrasubjetiva o inmanente, transubjetiva o trascendente*. Unidad del todo. *Matemática libre. No contradicción como condición de existencia y realidad*. "La esencia de la matemática reside justamente en su libertad". El edificio "totalmente libre" de la creatividad matemática: Gauss, Cauchy, Abel, Jacobi, Dirichlet, Weierstrass, Riemann, Fuchs, Poincaré, Kummer, Kronecker, Dedekind.	unidad libertad
§9. *Comparación de las fundamentaciones de los números reales*, vía distintos "factores de generación": Weierstrass (sumación), Dedekind (totalidad), Cantor (lenguaje de "series fundamentales", "diferentes formas conceptuales de presentación"). *La forma de definición cantoriana "destaca por su capacidad de generalización a los números suprafinitos"*.	complementariedad de los fundamentos riqueza ampliativa del concepto de número
§10. Versus el "misterio" y "dogma religioso" del continuo, se propone un desarrollo "sobriamente lógico" del concepto del continuo dentro de "la teoría matemática de conjuntos". A dejar de lado intuiciones temporales y espaciales. Enunciado de la *hipótesis del continuo*. Índices de conjuntos derivados mediante nuevos *números* de clases (I), (II), (II), ... *Conjuntos perfectos*. Descomposición (errónea, llevará a Cantor-Bendixson) de conjuntos de puntos. *Conjuntos conexos*. Definición de *continuo como perfecto + conexo*.	descomposición aritmética del continuo
§11. Conjunto (finito) como *uno y múltiple. Joya expositiva: construcción de los numerales (= ordinales) enumerables mediante tres principios de generación*.	naturalidad y necesidad de los principios de generación de numerales
§12. *(I) ≠ (II).* Aparición casual del símbolo aleph. "Actividad de creación" determinada por los tres principios de generación.	
§13. *Mínimos* en buenos órdenes. Prueba de que "*las clases de números (I) y (II) se siguen inmediatamente*".	crecimiento natural del universo
§14. *Distributividad* (parcial) de suma y multiplicación de numerales. Ecuaciones entre numerales y resoluciones varias. *Formas normales* y usos en adición y multiplicación. Anotaciones a los párrafos anteriores. (§1): *"En general, por una Variedad o Conjunto, entiendo toda multiplicidad que se pueda pensar como una unidad"*. Relación con Platón: idea, eidos, mixtos. (§4): Es deber observar las relaciones de los números suprafinitos "dondequiera que aparezcan en la naturaleza". *"La sucesión absolutamente infinita de los números me parece (...) un símbolo adecuado del absoluto"*. (§5): Lo infinito impropio, indeterminado, variable no es susceptible de existencia. (§7): Lista de autoridades en contra del infinito propio. (§8): Comentarios a Spinoza. Aceptación de completez: "el orden y conexión de las ideas es el mismo que el orden y conexión de las cosas". (§8 y 9): *signos y determinaciones* (forma de sentido y referencia), *despertar de los conceptos*. (§10): Enumerabilidad de clases de funciones continuas, no enumerabilidad de clases de funciones generales. *Conjunto ternario de Cantor*. Semicontinuidad.	conjunto: uno/múltiple ideas y mixturas gnoseología: sintaxis + semántica reducción: matemática = teoría de conjuntos

El tejido complejo de la emergencia de la teoría de conjuntos
(Mannigfaltigkeitslehre, Mengenlehre, Zahlenklassen)



---

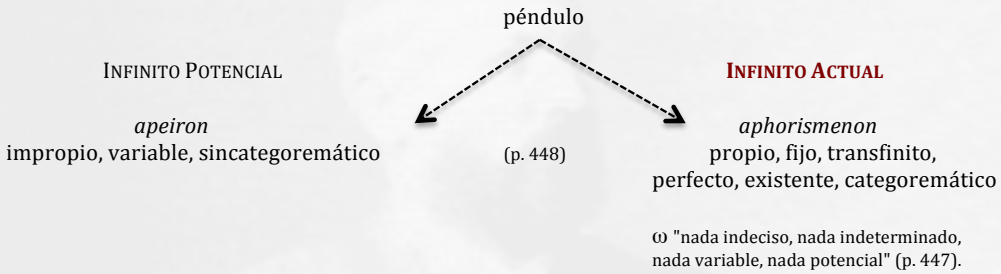
transgresiones / tránsitos
en la frontera entre (+) y (-)
(perfección vía segundo género, numerales vía generaciones iteradas,
hipótesis del continuo vía buena ordenación, etc.)

procesos diagonales transversales
(iteraciones, no enumerabilidad, generación, crecimiento, etc.)

Noviembre 15
Mitteilungen: notas históricas y filosóficas.
Perfección. Diagonalización.

[1887-1888] ***Notas a la teoría de los transfinitos (1, 2)*** (67 pp.)

(Publicado también como parte de: *Gesammelte Abhandlungen zur Lehre vom Transfiniten*, ed. Pfeffer, 1890)



ω "nada indeciso, nada indeterminado, nada variable, nada potencial" (p. 447).

El infinito potencial *exige* un infinito actual como *base* para sus razonamientos variables (pp. 450, 469).
Característica del transfinito: incrementabilidad (pp. 442, 445, 462), que apunta a un absoluto no incrementable (p. 463).
Introducción "no arbitraria o artificiosa", obtenida de la "fuente de la abstracción más natural" (p. 476).

TRES TIPOS DE INFINITO ACTUAL (p. 434)

1. absoluto (Dios)		*teología especulativa*
2. mundo fenoménico	**TRANSFINITO**	*metafísica*
3. abstracto		*matemáticas*

UNIVERSALES (p. 435): A. tipos de órdenes (= números ideales)
ordinales (en caso órdenes lineales), compuestos de "materia y forma" (p. 437)
B. **cardinales**

- Conforman una "estructura sistemática" del universo: "una multiplicidad y una variedad de unidades unificadas" (p. 436).
- Constituyen una colección de signos reales objetivos (pp. 438-439).
- Permiten la determinación de diferentes "valencias o potencias" (B), gracias al concepto de conjunto bien ordenado (A) (p. 444).
- Generan una "maravillosa armonía" en el estudio de las magnitudes (p. 447).
- Proponen abstracciones simples (orden) y dobles (tamaño) en el universo (p. 470).

CERCANÍA CONCEPTUAL en la introducción de *irracionales* y *transfinitos* (p. 452).
Los irracionales *requieren* el infinito actual (p. 468).

Cantor se instala históricamente en la **TRADICIÓN** de una "vieja verdad ignorada" (p. 440): referencias a "antecesores" que respaldaron el infinito actual (San Agustín p. 459, especulación cristiana p. 462).

Demostración de supuesta imposibilidad de existencia de magnitudes infinitesimales (vía recursión transfinita) (pp. 465-467).

"Firme convicción": "cantidad infinita actual de individuos creados no sólo en el universo sino también en nuestra tierra" (p. 456).

Ejemplos de "**pieza de música**" y "**pintura**" entendidas como conjuntos cuádruplemente ordenados (pp. 480-481).

[1884] ***Sobre variedades lineales infinitas de puntos 6*** (41 pp.)

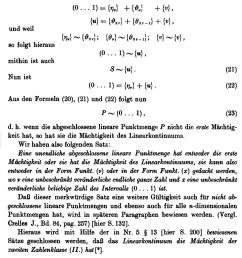
[1891] ***Sobre una cuestión elemental de la teoría de variedades*** (3 pp.)

texto	*contenido matemático*	*conceptos metodológicos/filosóficos*
[1884]	"Colmar vacíos pendientes" (p. 218). Descomposición de dominios en un continuo (vía intervalos encajados, método retrotraído a Lagrange, Legendre, Dirichlet, Cauchy, antes de Bolzano) (pp. 218-220). "Uno de los mayores genios de Francia, Pascal" (p. 221). Clases de números y buenos órdenes (pp. 221-222). Descomposición de enumerables (p. 222) y derivados (p. 223). Enumerabilidad fuerza no perfección (pp. 224-226). *Derivados superiores, vía índices numerales de clase (I) o (II)* (pp. 226-229). *Descomposiciones de tipo Cantor-Bendixson* (pp. 231-236). Notación de uniones (p. 236). Representación de cerrados como derivados (p. 237). Densidad y perfección (pp. 238-240). Volúmenes y medida (vía derivados, acotación, límites) (pp. 240-247). Propiedades de conjuntos perfectos (pp. 248-250). Caracterización de tipo de orden de racionales (pp. 251-253). *Tamaño del continuo para conjuntos perfectos* (no densos, pp. 254-255; arbitrarios, pp. 255-257). *Demostración de la hipótesis del continuo para conjuntos cerrados* (pp. 254-255).	descomposición iteración reducción (clausura) y saturación controlada (HC)
[1891]	"Puede darse una demostración mucho más sencilla" de que un intervalo arbitrario (α,β) no es enumerable (p. 87). *Totalidad de sucesiones infinitas en dos caracteres excluyentes no es enumerable (vía argumento diagonal explícito)* (pp. 87-88). *Teorema de Cantor: crecimiento de las potencias (vía caso [0,1], funciones características sobre [0,1] y argumento diagonal semi-explícito)* (pp. 88-89). Comentario sobre crecimiento vía clases de números y buenos órdenes (p. 89). "El desarrollo ulterior de este campo es tarea del futuro" (p. 90).	procedimientos diagonales generales ("usuales")

[las referencias de páginas de artículos remiten a la compilación *Sistema de números y conjuntos* (Gómez Bermúdez, ed.)]

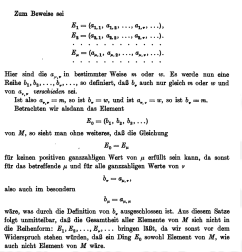
LOS VACILANTES ENUNCIADOS DE LA **HIPÓTESIS DEL CONTINUO**

año	1878	1883	1884
entorno textual	§ final	§ 3 / § 10	§ final
entorno conceptual	descomposición e inducción	descomposición / continuo euclidiano	demostración para cerrados
entorno temporal	"ocasión posterior"	"dentro de poco" / "pronto"	"párrafos posteriores"



EL LENTO ACCESO A LA **DIAGONALIZACIÓN EXPLÍCITA**

año	1872	1873	1883	1884	1891
entorno textual	§ inicial / § intermedio	carta	§ inicial / § intermedio	§ iniciales	§ intermedio / § final
formas de diagonalización	iteraciones / derivados	intervalos encajados	generaciones / desdoblamientos	iteraciones	diagonales usuales



Noviembre 22
Beiträge: contribuciones a la fundamentación de la teoría de los conjuntos transfinitos

---

[1895-1897] ***Contribuciones a la fundamentación de la teoría de los conjuntos transfinitos* I, II** (37 + 53 pp.)
Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre

[única aparición del término "Mengenlehre" en un título de trabajo de Cantor (!)]

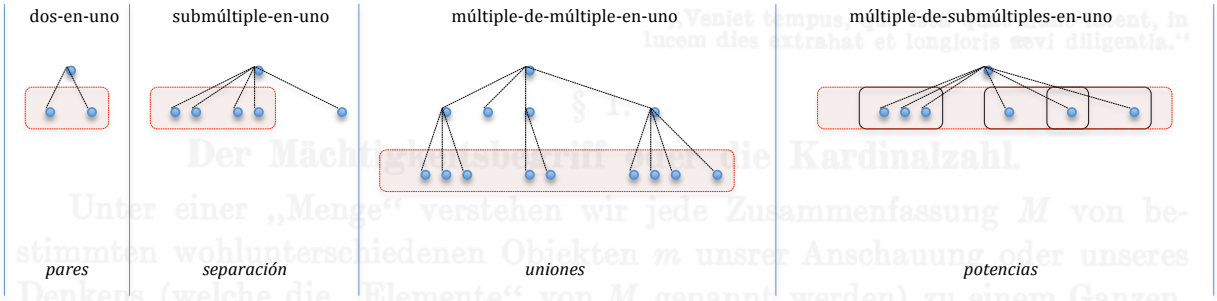
Traducción al francés (*Sur les fondements de la théorie des ensembles transfinis*, F. Marotte, 1899)
Edición y traducción al inglés (*Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers*, P. Jourdain, 1915)

contenido matemático	*conceptos metodológicos/filosóficos*
§1. *Definición de conjunto como uno y múltiple*. Cardinales ("potencias") y equivalencia. "$\overline{\overline{M}}$ brota de M".	lo Uno y lo Múltiple
§2. Comparación de cardinales. Anuncio: comparación cardinal es orden total.	
§3. Definiciones de adición y multiplicación de cardinales.	
§4. Exponenciación cardinal ("potenciación de potencias", vía "recubrimientos"). Unas *"pocas pinceladas" en el cálculo algebraico de potencias* demuestran $2^{\aleph_0} = c$ y $c^{\kappa} = c$ (κ cardinal finito o enumerable, c cardinal del continuo).	recubrimientos
§5. Números cardinales finitos. Usos de pruebas por inducción. Buena ordenación de los naturales.	núcleo arquetípico
§6. Estudio del "menor número cardinal transfinito" $\aleph_0$. Propiedades: $\aleph_0 + n = \aleph_0 = \aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0 \,.\, \aleph_0 = \aleph_0{}^n$. *Aparición de la sucesión de los alephs*: $\aleph_0$, $\aleph_1$, $\aleph_2$, ..., $\aleph_n$, ... $\aleph_\omega$, $\aleph_{\omega+1}$, ... ("y así continúa sin fin" – "descubierto en 1883").	generación natural
§7. Ordenamiento ($\overline{M}$ primera abstracción de M). Tipos de orden y semejanza. Conexiones entre $\overline{M}$ y $\overline{\overline{M}}$. En el caso infinito lineal: *unidad de cardinales y multiplicidad de tipos de órdenes ("números ordinales transfinitos")*. Caracterización de tipos de órdenes de naturales (ω) y enteros (*ω + ω).	abstracciones y redes lo Uno y lo Múltiple
§8. Definiciones de adición y multiplicación de tipos de orden. 1+ω ≠ ω+1, 2. ω ≠ ω.2.	
§9. Tipo de orden de los racionales (η). *Caracterización de η* (como conjunto enumerable, lineal, denso, sin primero ni último elemento). Germen del *back-and-forth*. Ecuaciones para η.	dialéctica
§10. "Series fundamentales" en un conjunto transfinito ordenado. Germen de las *cofinalidades*.	variación e invarianza
§11. Tipo de orden del continuo (θ). *Caracterización de θ* (como conjunto perfecto, denso por doquier).	
---	
§12. Anuncio: importancia de los conjuntos bien ordenados y de sus tipos (*números ordinales*: "material natural para una definición exacta de las potencias"). Definición (adecuado crecimiento) y caracterización (adecuada minimización) de conjuntos bien ordenados.	red de universales
§13. Secciones de conjuntos bien ordenados. Lemas y teoremas de comparación.	control seccional
§14. *Definición de ordinales como tipos de orden de conjuntos bien ordenados*. Teoremas de comparación entre ordinales (autorreferencia: *buen orden entre ordinales*). *Suma y producto de ordinales. Límites ordinales*.	iteraciones autorreferencia
§15. La *segunda clase de números*: $Z(\aleph_0)=\{\alpha \text{ ordinal}: \alpha \sim \aleph_0\}$. Construcción de sucesores y límites en la clase. Caso de ecuaciones que involucran a ω.	
§16. *Crecimiento*: $\overline{\overline{Z(\aleph_0)}} = \aleph_1$. Uso de proceso diagonal (cardinal > $\aleph_0$) y uso de secciones de conjuntos bien ordenados (cardinal ≤ $\aleph_1$).	crecimiento diagonal
§17. *Formas normales para ordinales enumerables "bajos"* (exponentes finitos) (según Zermelo, "estudio de casos especiales determinante para el descubrimiento").	
§18. Potencias ordinales en la segunda clase de números. *Funciones normales (recursión transfinita)*.	canon
§19. *Formas normales para ordinales enumerables en general* (exponentes arbitrarios). Aplicaciones a cálculos de productos y potencias. Caracterizaciones de casos de conmutatividad para suma y multiplicación.	naturalidad
§20. *Puntos fijos de la exponenciación ordinal con base* ω ("ε-números de la segunda clase de números"). Caracterización completa de tales puntos fijos. Cardinal $\aleph_1$ del conjunto de los ε-números.	variación e invarianza

LO UNO Y LO MÚLTIPLE

conjunto como uno y múltiple a la vez
universal: "unum versus alia": lo uno versus lo otro

- el axioma de extensionalidad (Zermelo 1908) configura un entorno analítico: conjunto (unidad) determinado por sus elementos (multiplicidad)
- los siguientes cuatro axiomas básicos (Zermelo 1908) corresponden a árboles de lo uno y lo múltiple:



- los demás axiomas responden a controles del infinito (presencia, buen orden, ascenso, descenso):
  infinitud (Zermelo 1908), elección (Zermelo 1904), reemplazo (Fraenkel 1922), fundamentación (von Neumann 1928)

LAS POTENTES "PINCELADAS"

emergencia del cálculo algebraico de cardinales para controlar el continuo

$2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$ (potencia del continuo) ; $\mathfrak{c}^{\kappa} = \mathfrak{c}$ (κ finito o enumerable)

el entendimiento de la *exponenciación cardinal* se convierte en el problema central de la teoría de conjuntos

¿dónde se sitúa $2^{\aleph_0}$ en la escala cardinal transfinita?

LOS UNIVERSALES : ESQUELETOS CANÓNICOS/NATURALES DEL UNIVERSO CONJUNTISTA

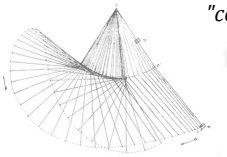
alephs: $\aleph_0$, $\aleph_1$, $\aleph_2$, ... , $\aleph_\omega$, $\aleph_{\omega+1}$, ...

tipos de órdenes (y caracterizaciones): ω (naturales), $^*\omega + \omega$ (enteros), η (racionales), θ (reales)

ordinales: ω, $\omega+1$, ... , $\omega+\omega=\omega.2$, $\omega.2 + 1$, ... , $\omega.3$, ... , $\omega.n$, ... , ω^2, ω^2+1, ... , ω^3, ... , ω^{ω} , ... , ε, ...

LA RIQUEZA DE LA DIALÉCTICA SATURACIÓN / CORTE

"descontrol": crecimiento diagonal



"control": seccionamiento ordinal

Noviembre 29

Multiplicidades inconsistentes: correspondencia con Hilbert y Dedekind

---

[1897-1899] *Correspondencia con Hilbert y Dedekind*

[26 sep. 1897]	C→H	*Totalidad de los alephs no es conjunto* ("disponible/acabado": es totalidad "absolutamente infinita"). *Uso para demostrar que todo cardinal es un aleph*.
[02 oct. 1897]	C→H	Precisiones sobre los conjuntos "acabados/saturados": coexistencia sin contradicción de sus elementos, "cosa en sí compuesta" ("*elemento de otro conjunto*", 6 oct. 1898)
[11 oct. 1897]	C→H	Anuncio: colección de funciones continuas posee potencia del continuo. Prueba: colección de funciones analíticas complejas posee potencia del continuo.
[10 oct. 1898]	C→H	*Definición* de conjunto "acabado". *Axiomas* sobre conjuntos "acabados" (prefigura axiomas de Zermelo y von Neumann). Prueba de que *el continuo es "acabado"*. Anuncio: los *alephs* deben ser demostrablemente "acabados".
[12 oct. 1898]	C→H	Delicadeza del "axioma de partes" – "de ningún modo tan simple".
[28 jul. 1899]	C→D	Presentación de los alephs. Problema: ¿todo cardinal es un aleph? Respuesta: sí ("hace ya dos años").
[03 ago. 1899]	**C→D**	Distinción de (1) *multiplicidades "absolutamente infinitas o inconsistentes"* (donde "es imposible concebir la multiplicidad como una unidad") y (2) *multiplicidades consistentes o "conjuntos"*. "Paradoja de Cantor": *la "colección de todo lo pensable" no es conjunto*. Propiedades de los conjuntos (*prefiguraciones de reemplazo, separación, uniones* (!)). *Definición de cardinal* de un conjunto como "concepto general" de todos los conjuntos equipotentes a él. *Definición de tipo de orden* de un orden lineal como "concepto general" de todos los similares a él. Definición (usual) de buen orden. *Definición de ordinal* (tipo de orden de un buen orden). *"Sistema" Ω de todos los ordinales*. *Demostración que Ω está bien ordenado y es inconsistente* ("paradoja de Burali-Forti", 1897). *Definición de clases de números Z(c)* (**c** cardinal dado), como "secciones" de *Ω*. *Definición rigurosa de la sucesión "absolutamente ilimitada" de los alephs* (vía clases de números). *Inconsistencia del sistema de todos los alephs*. *Uso para demostrar que el cardinal de todo conjunto es un aleph*. Consecuencia: *comparabilidad de cardinales*.
[16 ago. 1899]	C→D	Impaciencia de Cantor: "¿Ha encontrado Ud. tiempo para considerar mi reciente comunicación...?"
[28 ago. 1899]	C→D	Axioma de la aritmética: las multiplicidades finitas son conjuntos. Debe extenderse al transfinito: los alephs son conjuntos ("axioma de la aritmética ampliada transfinita").
[29 ago. 1899]	D→C	"No he logrado aclararme respecto a su división de las colecciones en consistentes e inconsistentes". "Mi entendimiento-escalera (...) muy lento (...) [me impide] introducirme en sus investigaciones".
[30 ago. 1899]	C→D	Acerca del teorema Cantor-Dedekind-Schröder-Berstein. Breve mención indirecta a la inconsistencia.
[31 ago. 1899]	C→D	*Prueba de que el sistema "de todas las clases pensables" no es conjunto* (por contradicción, vía su supuesto cardinal y el crecimiento vía potencias – argumento diagonal $2^a > a$ "transpuesto sin dificultad de ningún tipo"). "Existen por tanto determinadas multiplicidades que no son también unidades".
[15 nov. 1899]	C→H	Tercer artículo de los *Beiträge*, ligado a multiplicidades inconsistentes, queda *descartado* por falta de respuesta positiva de Dedekind. Comentarios equívocos sobre la relación Cantor-Dedekind. "Me he propuesto no faltar en París, en agosto de 1900".

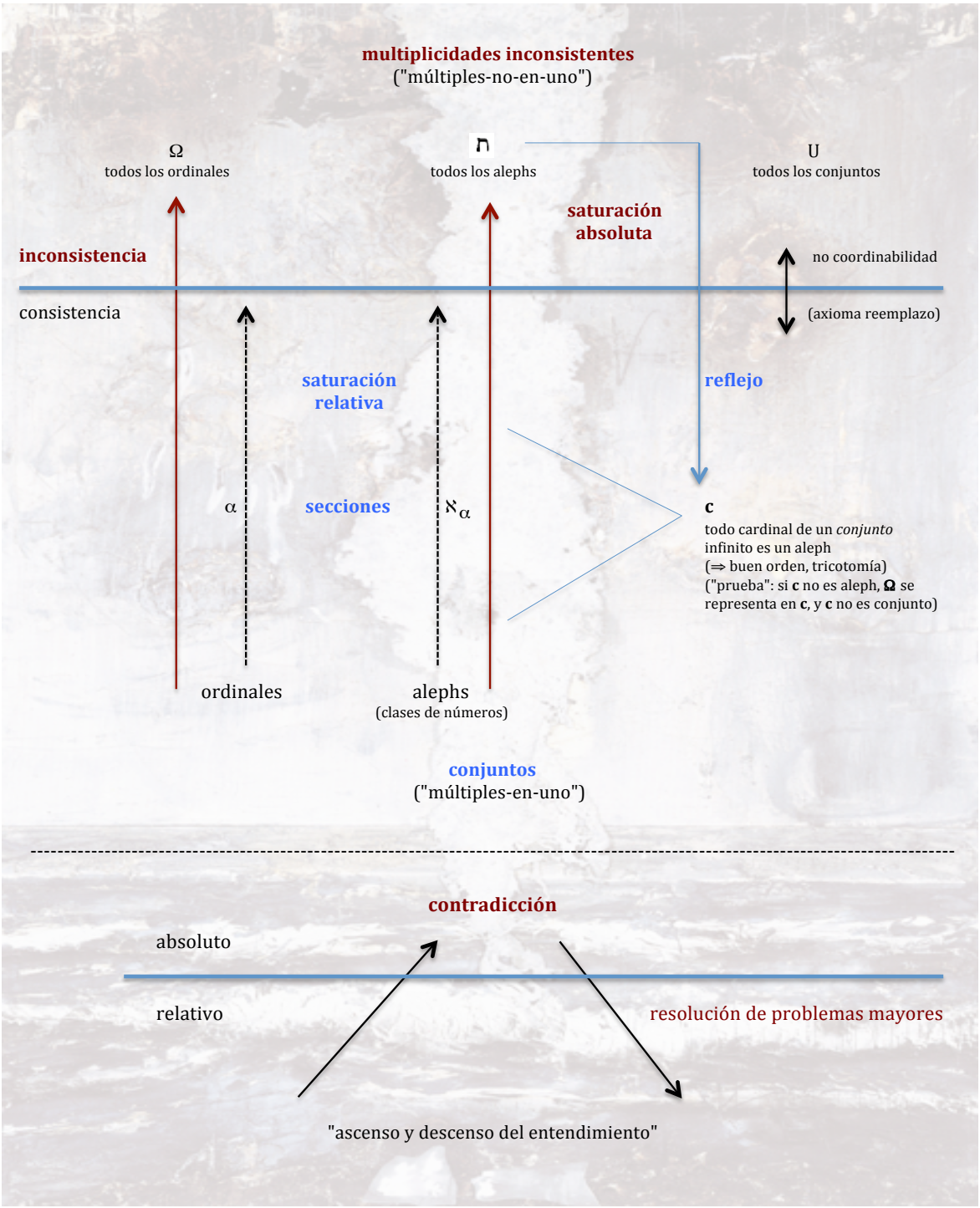
A. *Das System Ω aller Zahlen ist eine inkonsistente, eine absolut unendliche Vielheit.*

B. *Das System ת aller Alefs*

$$\aleph_0, \aleph_1, \cdots \aleph_{\omega_0}, \aleph_{\omega_0+1}, \cdots \aleph_{\omega_1}, \cdots$$

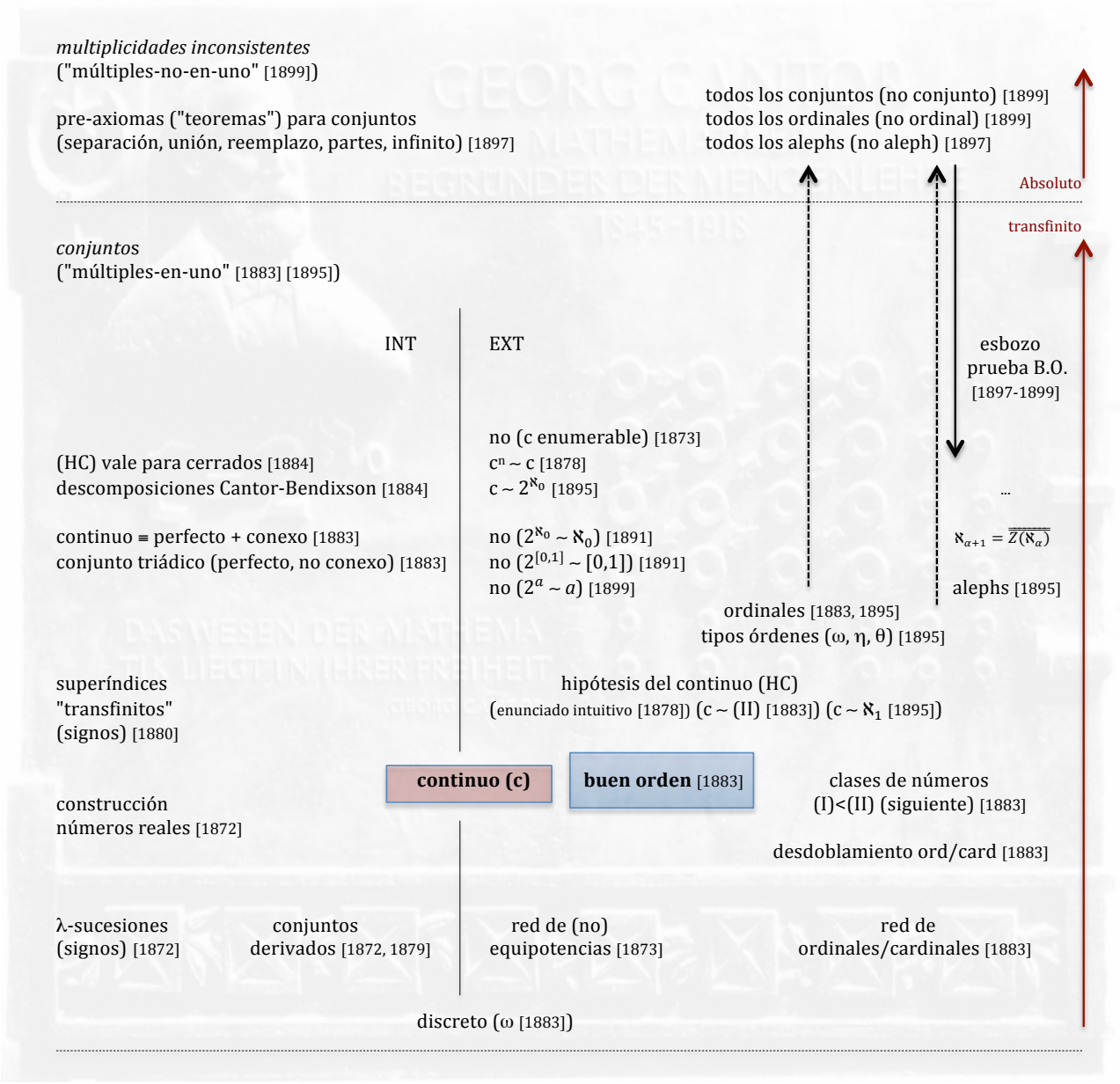
bildet in ihrer Größenordnung eine dem System Ω ähnliche und daher ebenfalls inkonsistente absolut unendliche Folge.

C. *Das System ת aller Alefs ist nichts anderes als das System aller transfiniten Kardinalzahlen.*

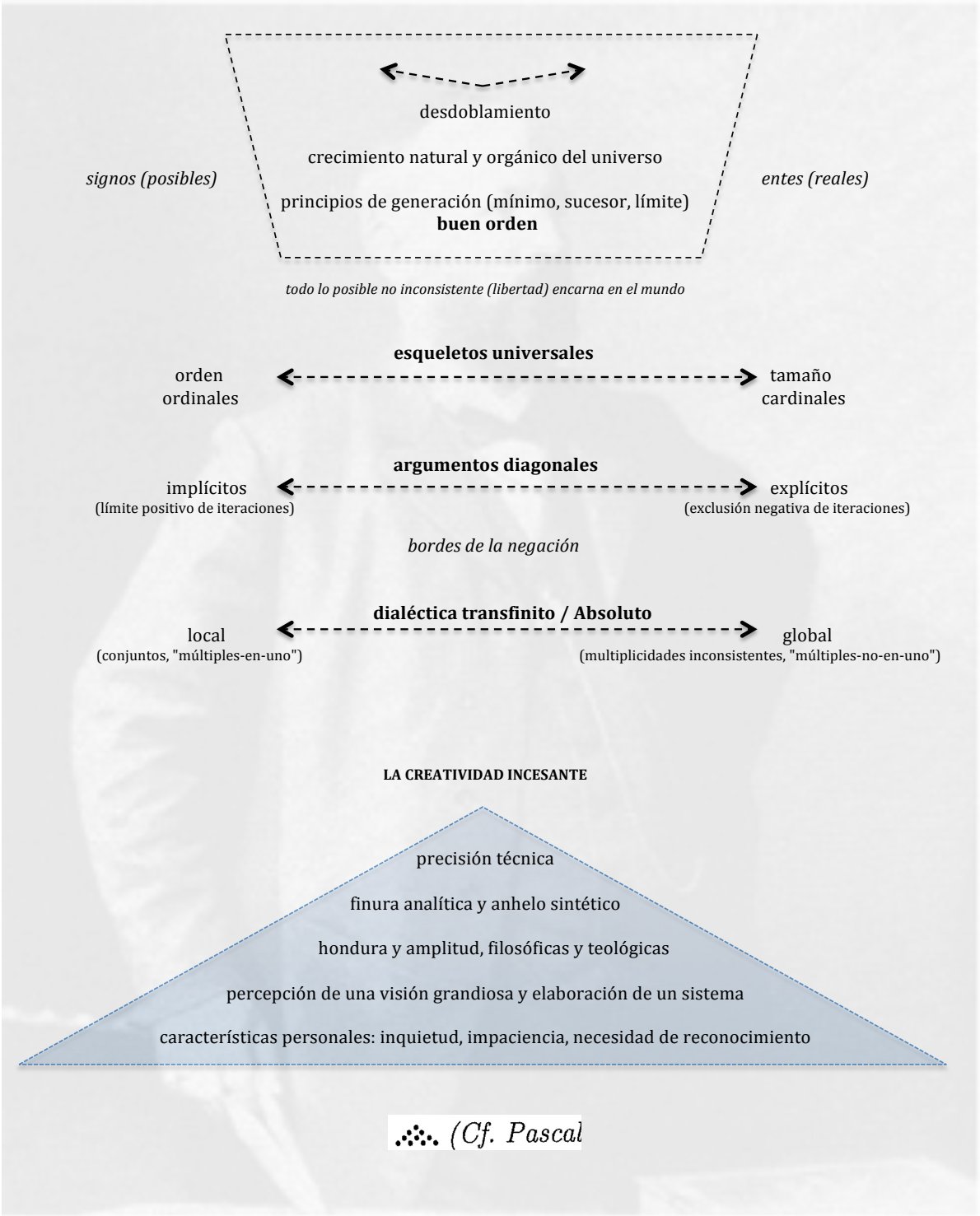

multiplicidades inconsistentes
("múltiples-no-en-uno")
Ω
todos los ordinales
ℶ
todos los alephs
U
todos los conjuntos
saturación absoluta
inconsistencia
no coordinabilidad
consistencia
(axioma reemplazo)
saturación relativa
reflejo
α
secciones
ℵα
c
todo cardinal de un conjunto infinito es un aleph
(⇒ buen orden, tricotomía)
("prueba": si c no es aleph, Ω se representa en c, y c no es conjunto)
ordinales
alephs
(clases de números)
conjuntos
("múltiples-en-uno")
contradicción
absoluto
relativo
resolución de problemas mayores
"ascenso y descenso del entendimiento"

Diciembre 6
Diagrama de la creatividad en Cantor

LOS APORTES MAYORES



LAS FUERZAS Y TENSIONES MAYORES



LA CREATIVIDAD INCESANTE

∴ *(Cf. Pascal*

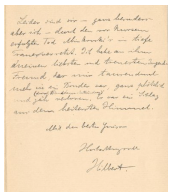
UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA – SEDE BOGOTÁ – DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

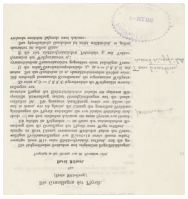
EPISTEMOLOGÍA E HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS
SEMINARIO CONTINUO DE FILOSOFÍA DE LAS MATEMÁTICAS
2014-I

HILBERT



David Hilbert





"(...) el método de los elementos ideales, esa creación genial del hombre, nos ayuda a escapar (...)" [Hilbert, 1925]

1	*(24 feb)*	*Mapa del seminario: el último matemático universal.*
2	*(26 feb & 3 mar)*	*Entrelazamiento de estructuras álgebra/geometría: grandes conceptos y problemas.*
3	*(5 & 10 mar)*	*Fundamentos lógicos de las matemáticas: grandes conceptos y problemas.*
4	*(12 & 17 mar)*	*1900: el entorno filosófico, técnico y biográfico.*
5	*(26 & 31 mar)*	*La teoría de invariantes (1885-1897).*
6	*(2 & 7 abr)*	*La teoría de cuerpos de números algebraicos (1893-1897).*
7	*(7 & 12 may)*	*Los fundamentos de la geometría (1899).*
8	*(14 & 19 may)*	*El espacio de Hilbert (1904-1906).*
9	*(21 & 26 may)*	*Problemas matemáticos (1900).*
10	*(4 & 9 jun)*	*Fundamentos de la aritmética y la lógica (1917-1928).*
11	*(11 & 16 jun)*	*Sobre el infinito (1926). Fundamentos de las matemáticas (1934-1939).*
12	*(18 jun)*	*Diagrama de la creatividad en Hilbert.*

SALÓN 404-212	miércoles	lunes subsiguiente
14.00-16.00	presentación del coordinador	presentaciones de estudiantes y complementos

Prerrequisitos.
Pregrado de Matemáticas: madurez matemática, tipo *Grupos y Anillos*, *Topología* o equivalente. Posgrado de Matemáticas: abierto. Otras Carreras y Posgrados, acercarse a discutir la idoneidad (o no idoneidad) con el instructor.

Evaluación.
Cada estudiante inscrito al **curso** *Epistemología e historia de las matemáticas* deberá proponer, a mediados de semestre, el tema de un ensayo escrito (E), que desarrollará en la segunda mitad del semestre, y obtendrá también una nota de participación (P), asociada a las presentaciones complementarias de los días lunes. La nota final del curso se obtendrá mediante la fórmula 0.3P + 0.7E.

Bibliografía.

David Hilbert, *Invariant Theory Papers* (1885-1897), Brookline: Math Sci Press, 1978.
David Hilbert, *Théorie des corps de nombres algébriques* (1897), París: Jacques Gabay, 1991.
David Hilbert, *The Foundations of Geometry* (1899), La Salle: Open Court, 1950.
David Hilbert, *Sur les problèmes futurs des mathématiques* (1900), París: Jacques Gabay, 1990.
David Hilbert, *Lectures on the Foundations of Arithmetic and Logic* (1917-1933), Berlín: Springer, 2013.
David Hilbert & Wilhelm Ackermann, *Elementos de lógica teórica* (1928), Madrid: Tecnos, 1975.
David Hilbert, *Gesammelte Abhandlungen* (3 vols.), Berlín: Springer, 1932-1935.
David Hilbert & Paul Bernays, *Fondements des mathématiques* (2 vols., 1939), París: L'Harmattan, 2001.

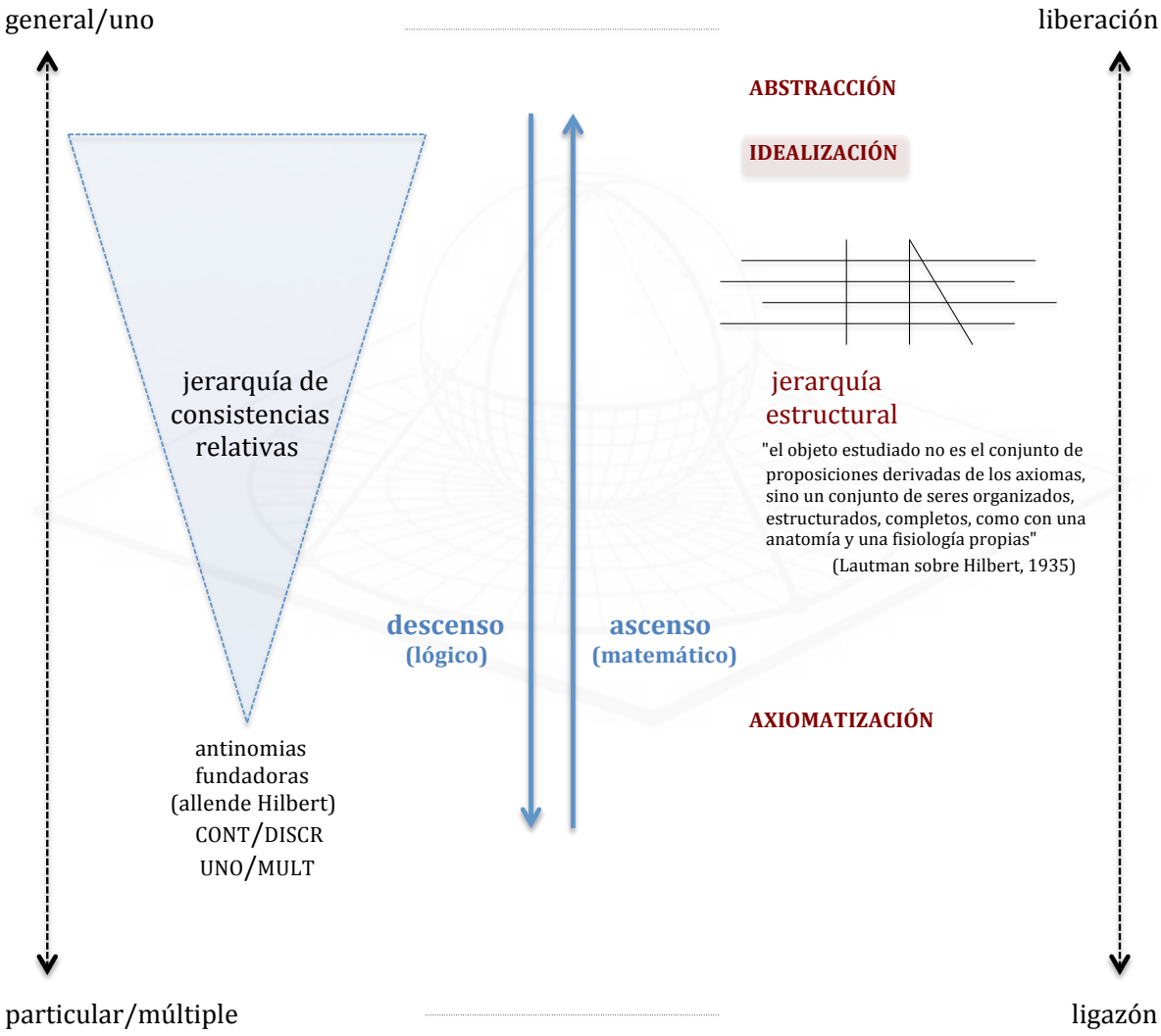
Fernando Zalamea - Oficina: 405-327 - Tel. (oficina): 3165000-13214
Mail: fernandozalamea@gmail.com - Web: www.docentes.unal.edu.co/fzalameat/

SEMINARIO CONTINUO DE FILOSOFÍA DE LAS MATEMÁTICAS
2014-I – HILBERT

Febrero 26
El Método
Estructuras algebraicas y geométricas: grandes conceptos y problemas

---

(I) EL MÉTODO



(II) ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS Y GEOMÉTRICAS

PÉNDULO PASCALIANO: RAZÓN Y CO/RAZÓN

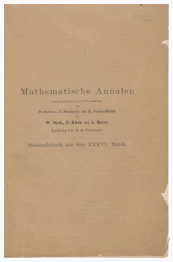
"En general, la matemática no se mira con mucha simpatía, aunque se reconozca su importancia.
Esto se debe a la extendida superstición de que la matemática sólo es una continuación de la aritmética.
Nuestro libro contribuirá a combatir esa opinión, usando figuras intuitivas en vez de fórmulas..."
(Hilbert, *Geometría intuitiva*, 1920/1932)

CORAZÓN DE LAS MATEMÁTICAS
" ÁNGEL DE LA TOPOLOGÍA Y DIABLO DEL ÁLGEBRA ABSTRACTA" (Weyl 1939)

tensión esencial
álgebra ↔ geometría

PRIMER PERIODO HILBERTIANO: ÁLGEBRA Y ARITMÉTICA

teoría de invariantes (1890) teoría de cuerpos de clases (1897)





UNO/MULT CONT/DISCR

formas canónicas – *factorización* ideales – *ramificación*

SEGUNDO PERIODO HILBERTIANO: GEOMETRÍA Y ANÁLISIS FUNCIONAL

fundamentos de la geometría (1899) ecuaciones integrales (1908)





UNO/MULT CONT/DISCR

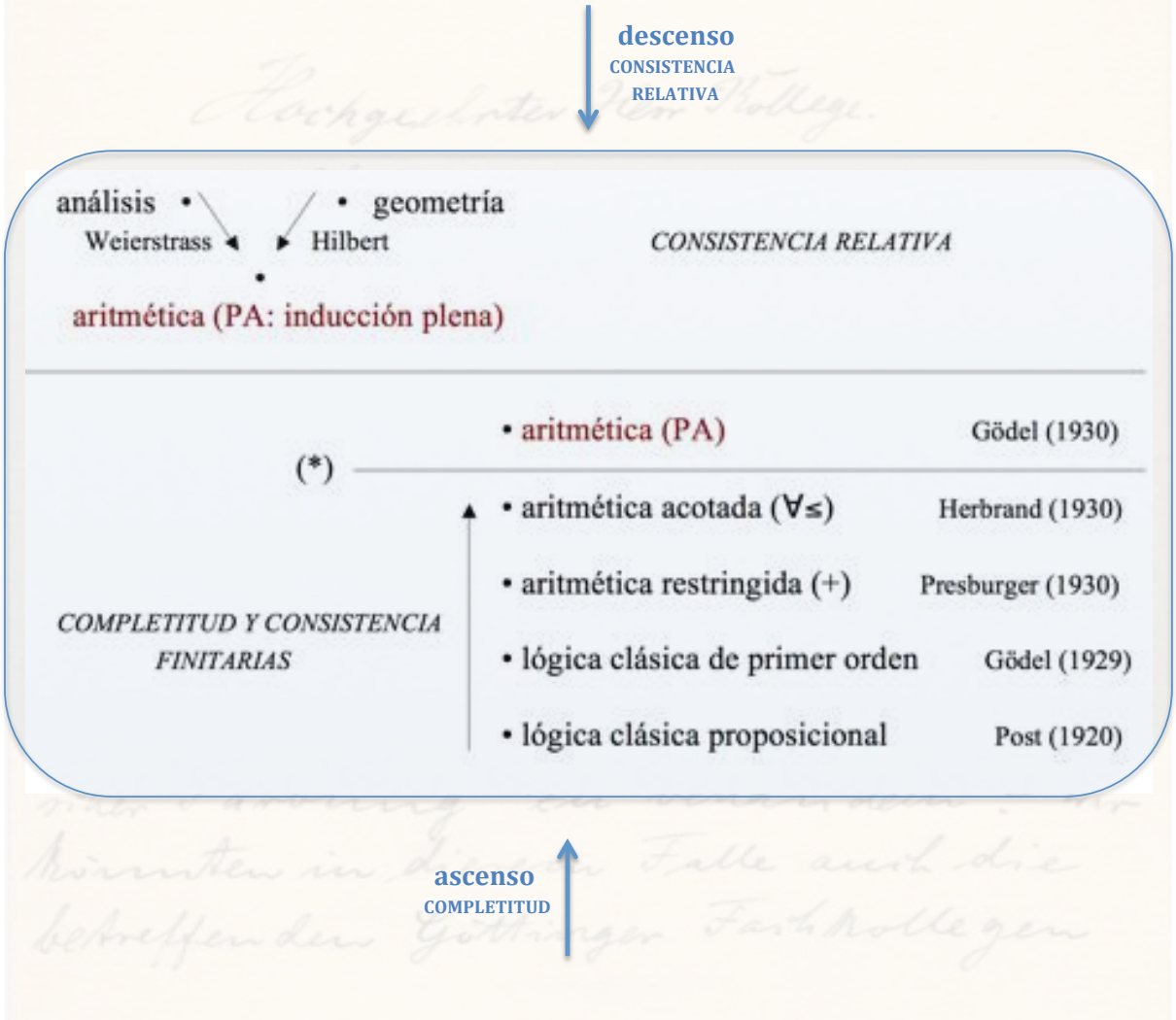
coordinaciones estructurales - *axiomatización* ecuaciones infinitarias – *espectralización*

Marzo 5
El Método
Fundamentos de las matemáticas: grandes conceptos y problemas

---

(I) EL MÉTODO

vaivén descenso/ascenso
ideal absoluto: conjunción en la frontera (*): PA
realidad relativa: PA: incompletitud, imposibilidad de autoconsistencia



(II) LOS PROGRAMAS DE HILBERT

SIGNOS
construcción de una *semiótica pragmática* para expresar la *matemática*

(1) reglas para capturar las ***estructuras*** matemáticas:
AXIOMAS
(aritméticos, algebraicos, geométricos, etc.)

(2) reglas para capturar el ***lenguaje*** matemático:
FORMALIZACIÓN DEDUCTIVA
(primer orden, sintaxis, semántica, consistencia, completitud, etc.)

(3) reglas para capturar el ***gesto*** matemático
METALENGUAJE
(niveles, finitismo, intuicionismo, etc.)

TERCER PERIODO HILBERTIANO: FUNDAMENTOS DE LAS MATEMÁTICAS (= LA MATEMÁTICA) MULT / UNO

problemas futuros (1900)


MATHEMATICAL PROBLEMS

DAVID HILBERT

Lecture delivered before the International Congress of Mathematicians at Paris in 1900.

Who of us would not be glad to lift the veil behind which the future lies hidden; to cast a glance at the next advances of our science and at the secrets of its development during future centuries? What particular goals will there be toward which the leading mathematical spirits of coming generations will strive? What new methods and new facts in the wide and rich field of mathematical thought will the new centuries disclose?

History teaches the continuity of the development of science. We know that every age has its own problems, which the following age either solves or casts aside as profitless and replaces by new ones. If we would obtain an idea of the probable development of mathematical knowledge in the immediate future, we must let the essential questions pass before our minds and look over the problems which the science of to-day sets and whose solution we expect from the future. To such a review of problems the present time, lying at the dividing line of two centuries, seems well adapted. For the close of a great epoch not only invites us to look back into the past but also directs our thoughts to the unknown future.

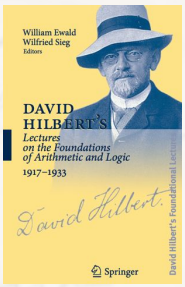
The deep significance of certain problems for the advance of mathematical science in general and the important rôle which they play in the work of the individual investigator are not to be denied. As long as a branch of science offers an abundance of problems, so long is it alive; a lack of problems foreshadows extinction or the cessation of independent development. Just as every human undertaking pursues certain objects, so also mathematical research requires its problems. It is by the solution of problems that the investigator tests the temper of his steel; he finds new methods and new outlooks, and gains a wider and freer horizon.

It is difficult and often impossible to judge the value of a problem correctly in advance; for the final award depends upon the grain which science obtains from the problem. Nevertheless we can ask whether there are general criteria which mark a good mathematical problem. An old French mathematician said: "A mathematical theory is not to be considered complete until you have made it so clear that you can explain it to the first man whom you meet on the street." This requirement, in case of comprehension, here insisted on for a mathematical theory, I should still more demand for a mathematical problem if it is to be perfect; for what is clear and easily comprehended attracts, the complicated repels us.

Moreover a mathematical problem should be difficult in order to entice us, yet not completely inaccessible, lest it mock at our efforts. It should be to us a guide

Reprinted from Bull. Amer. Math. Soc. 8 (July 1902), 437–479.

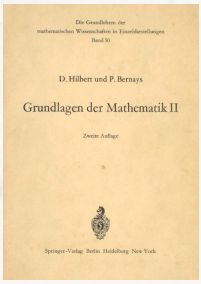
conferencias sobre fundamentos (1917-1933)



elementos de lógica (1928)



fundamentos de las matemáticas (1934-1939)



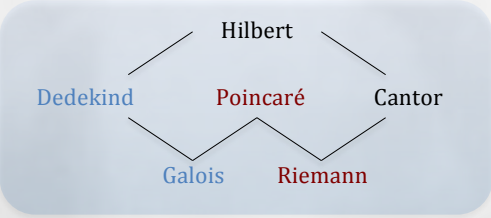
SEMINARIO CONTINUO DE FILOSOFÍA DE LAS MATEMÁTICAS
2014-I – HILBERT

Marzo 12
1900: entornos técnico, filosófico y biográfico

(A) El entorno técnico

Influencia

(a) Maestros subyacentes en la Matemática: *síntesis* de la **variación discreta** y la **variación continua**



(b) Amigos del alma – el *espíritu* de la matemática: Minkowski, Hurwitz

(c) Gran colega: Klein.

Herencia

(1) 75 (!) tesistas doctorales (selección en itálicas, abajo) – Salto gigantesco *versus* G-R-D-P-C

(2) Escuela en análisis: *Schmidt*, Carathéodory, *Haar*, *Steinhaus*, *Weyl*, *Courant*, Wiener, etc.

(3) Escuela en álgebra: *Takagi*, *Hecke*, Noether, van der Waerden, Artin, Hasse, Mac Lane, etc.

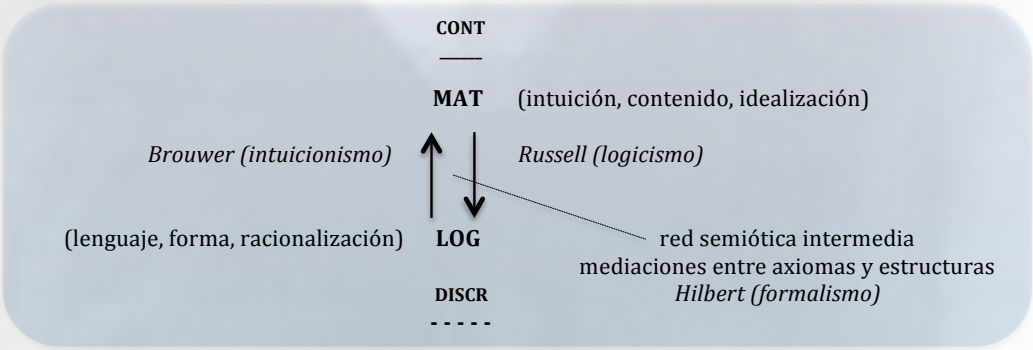
(4) Escuela en lógica: Bernays, *Ackermann*, Herbrand, von Neumann, *Curry*, etc.

(5) Reconstrucción entera de la matemática: herencia crucial en Bourbaki.

(B) El entorno filosófico

(d) Conciudadano de Kant

(e) Maestros contendores en los Fundamentos: *mediación dialéctica* de fuerzas inversas



(C) El entorno biográfico

fecha	*vida*	*obra*
1862 (23 ene)	Nacimiento en Wehlau (cerca de Königsberg)	
1879-1880	Liceo en el Wilhelm Gymnasium - Königsberg	
1880-1883	Estudios en Universidad de Königsberg	
1884	Comienzos de extensa amistad con Minkowski y Hurwitz Veranos regulares en Rauschen (balneario estival cerca de Königsberg)	
1885	*Tesis Doctoral* (teoría invariantes, bajo Lindemann)	
1886	Viaje matemático (París, Göttingen, Erlangen). *Habilitación* en Königsberg	
1888		Resolución Problema Gordan
1890		***Invariantensysteme*** (volumen de trabajos sobre invariantes)
1892	Profesor en Königsberg (sucesor de Hurwitz) Matrimonio con Käthe Jerosch	
1893	Nacimiento de su hijo Franz	Nuevas pruebas de trascendencia de e, π
1895	Profesor en Göttingen (sucesor de Weber, bajo impulso de Klein) Clases: génesis, dudas, creación	
1894-1897		***Zahlbericht*** (teoría algebraica de números, cuerpos de clases)
1899		***Grundlagen der Geometrie*** Resolución Problema Dirichlet
1900	Congreso Internacional de Matemáticas (París)	***Mathematische Probleme*** (23 problemas futuros de las matemáticas)
1902	Minkowski nombrado Profesor en Göttingen (bajo impulso de Hilbert)	
1906-1912	1908: meses de depresión 1909 (12 ene): muerte de Minkowski 1909 (abr): visita de Poincaré a Göttingen	***Grundzüge (...) Linearen Integralgleichungen*** (trabajos en análisis funcional; teoría espectral = "espacios de Hilbert")
1910	Premio Bolyai	
1914	Franz internado en una institución mental	Estudios sobre Fundamentos de la Física y de las Matemáticas Relatividad general (nov 1914)
1917-1930	Creación de la Escuela de Hilbert en Fundamentos	
1924		***Methoden der Mathematischen Physik*** (con Courant)
1925		***Über das Unendliche***
1928	Congreso Internacional de Matemáticas (Bologna) Controversia con Brouwer	***Grundzüge der Theoretischen Logik*** (con Ackermann)
1930	Retiro de la Universidad (35 años como Profesor en Göttingen)	
1933	Ascenso del nazismo - Descomposición de la Escuela de Hilbert	
1934-1939		***Grundlagen der Mathematik*** (con Bernays)
1943 (14 feb)	Muerte de Hilbert (complicaciones por inactividad tras una fractura)	

Marzo 26
Teoría de Invariantes (1885-1897)

[1885] *Sobre las propiedades invariantes de formas binarias especiales y funciones esféricas* (Tesis Doctoral en Königsberg, 50 pp.)

[1887] *Sobre un punto de vista general para investigaciones de la teoría de invariantes de formas binarias* (Mathematische Annalen 28: 381-446)

[1890] ***Sobre la teoría de las formas algebraicas*** (Mathematische Annalen 36: 473-534)

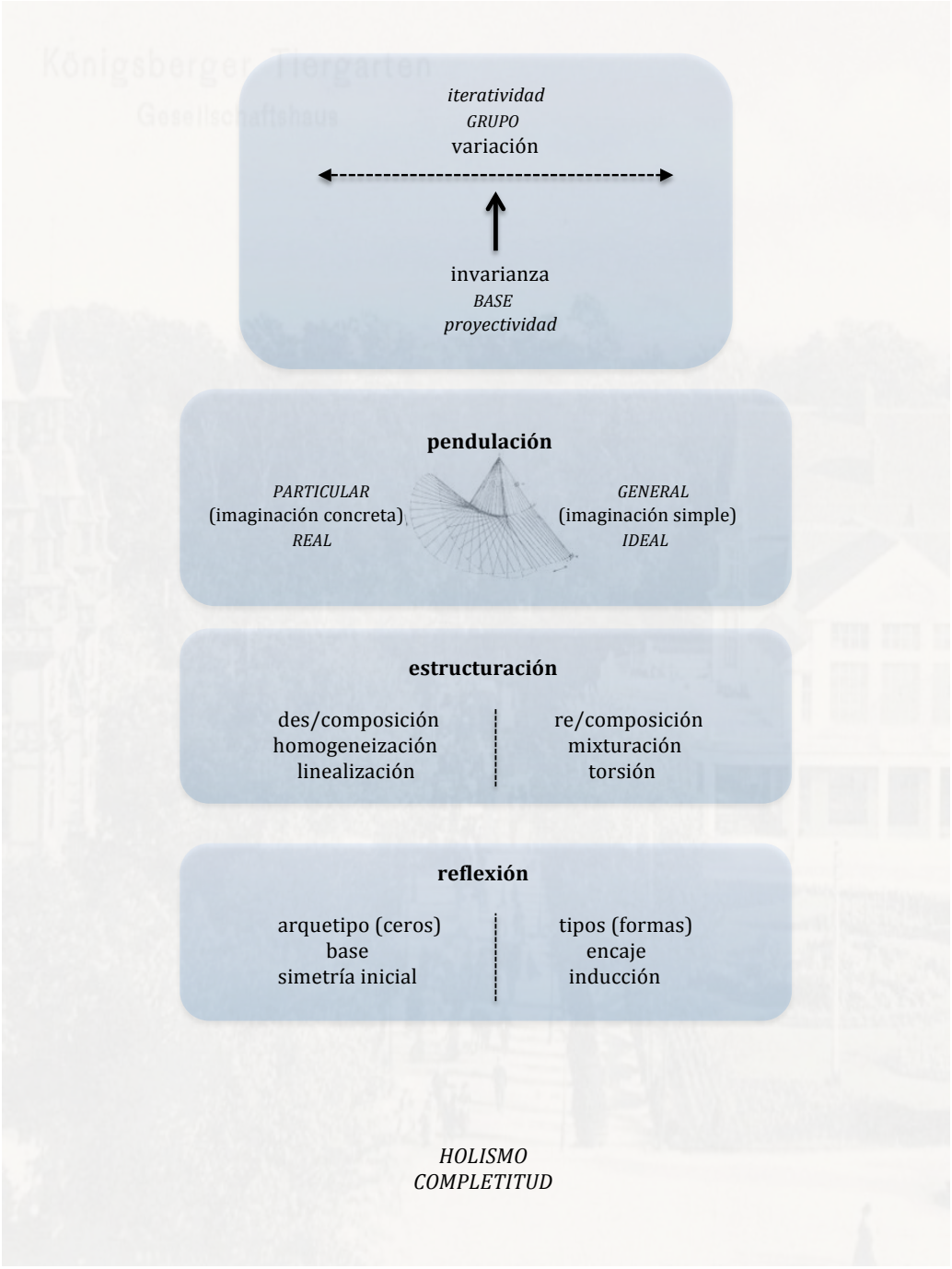
[1893] ***Sobre sistemas completos de invariantes*** (Mathematische Annalen 42: 313-373)

[1897] *Notas sobre teoría de invariantes* (Curso en Göttingen, 191 pp.)

trabajo	*contenido matemático (selección)*	*conceptos metodológicos/filosóficos*
[1885]	Objetivo: métodos generales para la construcción de sistemas de relaciones invariantes, y aplicación al caso de las funciones esféricas (p. 1). Resultado central: *representación* de formas binarias vía derivadas (p. 2). *Mixtos* y *operadores no conmutativos* (pp. 7-9). Caracterización de invariantes vía *determinante* de operadores mixtos (pp. 16-18).	mixturación y torsión lo simple en lo general
[1890]	Base ideal finita en anillo de polinomios (enunciado, p. 143; prueba por *inversión* e *inducción*, pp. 145-149). Consecuencia: base finita (polinomial) para sistemas de invariantes (p. 150). Caso con coeficientes no en cuerpo, sino en anillo de enteros: extensión de la prueba (pp. 159-164). Base finita para relaciones: teoría de los *syzygies* (pp. 168-183, "prueba no fácil"). Ejemplos (pp. 183-191). Función característica de un "módulo" (= ideal) (pp. 192-198, 203-206). Caracterización completa del "módulo" de formas binarias (pp. 199-201). Base finita (*invariacional*) para sistemas de invariantes: caso formas binarias (pp. 209-211, nueva prueba del Teorema de Gordan). Extensión al caso ternario (pp. 211-217). Prueba en el caso general de *n* variables, usando proceso de diferenciación de Cayley (pp. 217-221). Problemática de invarianzas bajo *subgrupos arbitrarios* de GL(*n*) (p. 221).	iteración y linealización existencia vía no contradicción correlación mixta (syzygies) diferenciación mixta (invariantes) variación general (grupo arbitrario)
[1893]	Teoría de invariantes como "notable ejemplo especial" de teoría de funciones algebraicas (analogía: invariantes / funciones algebraicas ≡ campos ciclotómicos / campos de números algebraicos) (p. 225). *Independencia* de proposiciones sobre invariantes (p. 227). *Nullstellensatz* ("ceros-*locus*-teorema") (pp. 233-240; prueba vía *encaje recursivo de ideales y representaciones*). Caracterización de representaciones de invariantes (p. 241). *Variedades algebraicas* y ceros (p. 242). Aplicación al caso de formas binarias (*una*, pp. 243-249; *múltiples*, pp. 250-252). Grado del campo de invariantes: aproximación asintótica, cálculos especiales (pp. 252-267). Formas nulas (estructura, pp. 268-276; construcción, pp. 276-297). Construcción de *sistemas completos* de invariantes (pp. 298-301). "Hemos obtenido los objetivos generales más importantes de la teoría de los campos de funciones formados por invariantes" (p. 301).	holismo estructural entrelazamiento de niveles y estratos reflexión desde el arquetipo (ceros) pendularidad efectiva de existencia y construcción
[1897]	Resumen del trabajo: "1. Definiciones y conceptos. Propiedades básicas. 2. Teorema fundamental. Ejemplos y corolarios. 3. Métodos de representación" (p. 113). Tres etapas en un teorema matemático: *existencia, constructibilidad y construcción* (p. 133).	método del método

Las referencias de páginas para [1885]-[1893] remiten a la traducción inglesa *Hilbert's Invariant Theory Papers* (ed. R. Hermann), Brookline: Math Sci Press, 1978.

Las referencias de páginas para [1897] remiten a la traducción inglesa *Theory of Algebraic Invariants* (ed. B. Sturmfelds), Cambridge: Cambridge University Press, 1993.


iteratividad
GRUPO
variación
invarianza
BASE
proyectividad
pendulación
PARTICULAR
(imaginación concreta)
REAL
GENERAL
(imaginación simple)
IDEAL
estructuración
des/composición
homogeneización
linealización
re/composición
mixturación
torsión
reflexión
arquetipo (ceros)
base
simetría inicial
tipos (formas)
encaje
inducción
HOLISMO
COMPLETITUD

Abril 2
Zahlbericht (1893-1897)

[1897] ***La teoría de los cuerpos de números algebraicos* (= "*Zahlbericht*")**
(Reporte para la Sociedad Matemática Alemana: Jahresbericht der D. M. V. 4 (1897): 175-546)

contenido matemático (selección)	*conceptos metodológicos/filosóficos*
Prefacio. La teoría de números "requiere un alto grado de facilidad en el pensamiento abstracto" (p. *viii*). Analogías, niveles, esencias (p. *viii*). *Invariantes en lo profundo* (pp. *viii, ix*). Unificación, sencillez, generalidad (pp. *ix, x*). *Arquitectónica* (p. *x*). Uso del *Principio de Riemann*: "completion de pruebas no por cálculos, sino puramente por ideas" (p. *x*). Belleza, armonía, visión (p. *x*). El *viaje* del entendimiento (p. *x*).	descensos/ascensos del entendimiento unidad / generalidad arquitectónica / armonía
Algunos grandes fragmentos conceptuales. *Parte I* (pp. 3-78). *Teoría general de cuerpos de números*: conjugados, enteros, norma, ideales (multiplicación, divisibilidad, factorización única), congruencias, discriminante, unidades, clases de ideales (finitud, control asintótico). *Parte II* (pp. 79-114). *Cuerpos de números galoisianos*: ideales primos, subcampos, ramificación, extensiones abelianas y cíclicas, descomposiciones. *Parte III* (pp. 115-160). *Cuerpos de números cuadráticos*: géneros, residuos, símbolos cuadráticos, leyes de reciprocidad, cálculo del número de clases de ideales. *Parte IV* (pp. 161-224). *Cuerpos ciclotómicos*: raíces de la unidad, caso de abelianidad, leyes de reciprocidad, cálculo del número de clases de ideales. *Parte V* (pp. 225-334). *Cuerpos de números "de Kummer"*: combinación de raíces *l*-ésimas y raíces de la unidad, símbolos cuadráticos generales, primos al infinito, leyes generales de reciprocidad.	1) descomposicionalidad 2) factorizabilidad 3) ramificabilidad 4) residualidad 5) reciprocidad 6) idealidad 7) estratificabilidad
Un par de teoremas célebres. *Satz 90* (pp. 105-106). Si K/k es cíclica con s generador de G=Gal(K/k), $\forall a \in K$ norma(a)=1 $\Rightarrow \exists b \in$K tq. $a=(sb)/b$. Homológicamente (Noether), esto indica que se tiene $H^1(G,K^*)=1$. *Satz 163* (pp. 305-306). Ley de reciprocidad general de Hilbert: si $k(\zeta)$ es un cuerpo ciclotómico regular y a, b son enteros del cuerpo, $\prod\{a,b/\wp\}=1$ (producto sobre todos los ideales primos $\wp$ del cuerpo).	

Las referencias de páginas remiten a la traducción inglesa *Theory of Algebraic Number Fields* (trad. I. T. Adamson), Berlín: Springer, 1998.

Trabajos posteriores donde Hilbert conjetura los teoremas centrales de la teoría de cuerpos de clases:

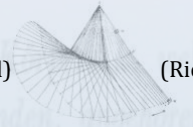
[1899] *Sobre la teoría de los cuerpos de números relativos cuadráticos* (Mathematische Annalen 51: 1-127)

[1902] ***Sobre la teoría de los cuerpos de números relativos abelianos*** (Acta Mathematica 26: 99-132)

EL PÉNDULO

"dos tradiciones rivales en teoría de números" (Hasse 1952)

construcción
(Gauss, Kummer, Kronecker, Hensel)



concepto
(Riemann, Dedekind, Hilbert)

sistematización, unificación de notación, generalización:
apertura de investigaciones en teoría algebraica de números
(Takagi, Artin, Hasse, Herbrand, Chevalley, Chebotarev, ... , Wiles)

LEYES DE RECIPROCIDAD

cuadrática	ciclotómica	*p*-ádica	normal
Gauss	Eisenstein - Kummer	Hensel	Hilbert

problema general: descomposición (**ramificación**) de primos

armonías y simetrías escondidas en la estructura modular de la aritmética –
lo Uno y lo Múltiple - recordatorio de fondo: superficies de Riemann

CUERPOS DE CLASES

generalización amplia de leyes de reciprocidad

cuerpo de números

K — Galois: grupo de automorfismos [estructura externa, extensión]

k — Hilbert: **grupo de clases de ideales** [estructura interna, **ramificación**]

caso de extensiones **abelianas**

ramificación intermedia de los ideales fuerza estructuración intermedia de los cuerpos
(teoría de la *ambigüedad* de Galois, elevada a ambigüedad de substituciones ideales: Frobenius, Artin)

existencia de *máxima* extensión abeliana y caracterización (Takagi) de las subextensiones
vía subgrupos del grupo de clases de ideales (≈ *ideles*, Chevalley)

caso no abeliano: germen del programa de Langlands

Mayo 7
Fundamentos de la geometría (1899)

Base clásica:	Euclides (*Elementos*, c. 300 aC; "*lógica* de la geometría más que su *substancia*" [Birkhoff & Bennett 1987])
Base barroca:	Descartes, Fermat ("geometría analítica", término inventado 150 años después: Lagrange, Lacroix) Desargues, Pascal ("geometría proyectiva": teoremas de perspectiva, invarianza birracional, colinearidad)
Base romántica:	Bolyai, Lobachevski, Riemann (geometrías no euclideanas) Von Staudt ("álgebra geométrica" de los griegos, reencarnada en el contexto de la geometría proyectiva)
Entorno directo:	Pasch (1882), Schur (1891), Wiener (1891), Killing (1893), Klein (1893, 1895) (fundamentos y problemas) Peano (1894, 1899), Poincaré (1898), Russell (1897) (fundamentos y problemas)

[1899] ***Grundlagen der Geometrie***
(Curso en Göttingen, 1898-1899; redactado y puesto en limpio para la inauguración –*Festschrift*– del monumento Gauss-Weber en Göttingen; Leipzig: Teubner, 1899; 92 pp.)

contenido matemático (selección)	*conceptos metodológicos/filosóficos*
Capítulo 1. *Cinco grupos de axiomas* (p. 2): (I) incidencia (pp. 2-3), (II) orden (pp. 3-5), (III) paralelas (pp. 7-8), (IV) congruencia (pp. 8-10), (V) continuidad (arquimedianeidad) (pp. 15-16).	• desglose analítico, en vistas de una recomposición sintética
Capítulo 2. *Consistencia* e *independencia* de los axiomas: modelo de números algebraicos (pp. 17-18), geometrías no euclideanas (p. 19), geometrías diversas sobre campos de números (en particular, uso del campo de series de potencias reales formales $\Omega[[t]]$ como una geometría de Veronese que muestra la independencia del axioma arquimedeano, pp. 21-22).	• lo algebraico como lo "euclideano" • independencia (1): traducción (cuerdas) de lo no euclideano dentro de lo euclideano • independencia (2): no saturación de lo trascendente por iteraciones algebraicas
Capítulo 3. Definición de *campo ordenado* (pp. 23-24). Prueba de caso especial del *teorema de Pappus* (Pascal) (pp. 24-29). Problema de *coordinación inversa* (pp. 29-30) y uso del teorema de Pappus para demostrar *conmutatividad y asociatividad* de la multiplicación (p. 31). Proporciones y ecuaciones (pp. 32-36).	• inversión: álgebra geométrica • arquetipo (1): teorema de Pappus
Capítulo 4. Descomposiciones poligonales (usos del teorema de Jordan) (pp. 37-45).	
Capítulo 5. *Teorema de Desargues*, prueba *espacial* realizable con axiomas (I)-(III) (p. 46). Una prueba *planar requiere* en cambio axiomas (IV) también: construcción de una geometría planar *no-desarguesiana* que satisface (I)-(III) (pp. 48-58).	• arquetipo (2): teorema de Desargues • lógicas distintas: espacio *versus* plano • independencia (3): traducción (curvas) de lo no desarguesiano dentro de lo euclideano
Capítulo 6. *Metateoremas* sobre el *Teorema de Pappus* (= "Pascal") (p. 65). Relación con la conmutatividad de la multiplicación (pp. 66-67) y prueba de su indemostrabilidad a partir de (I)-(III): construcción de un subanillo de división linealmente ordenado *no conmutativo* contenido en $\Omega[[s,t]]$ (pp. 67-68).	• forzamiento: conmutatividad desde el arquetipo (1) • independencia (4): no conmutatividad en la liberalidad genérica
Capítulo 7. Construcciones geométricas (linealizaciones, escalas). Conexión con sumas de cuadrados.	• posibilidad como positividad
Conclusión. En contextos bien delimitados, estudio de "soluciones completas" y "demostraciones rigurosas", o sino, de las "razones de la imposibilidad del éxito y, por tanto, de la necesidad del fracaso"; "la pregunta de la imposibilidad de una solución juega un papel importante (...), ocasión de descubrir nuevos y fructíferos campos de investigación"; los juicios dependen de "puntos de vista" asociados a "los métodos de demostración que preferamos" (p. 82). Priman así la *pragmática* y la *relatividad* del conocimiento matemático.	

Las referencias de páginas remiten a la traducción inglesa *The Foundations of Geometry* (trad. E. J. Townsend, La Salle: Open Court, 1950; 1ª ed. 1902).

Originalidad de Hilbert respecto a Euclides:

(A) formas de control de lo imposible (independencia)
(B) manejo de modelos con subclases de números algebraicos
(C) caracterizaciones completas con herramientas de álgebra geométrica

Enlace fundamental con trabajos previos de Hilbert:

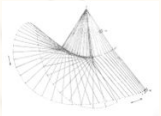
INVARIANTES (independencia de subsistemas, 1893)
NÚMEROS ALGEBRAICOS (campos de números, 1897)

INVERSIONES CENTRALES

Bolyai, Lobachevski, Riemann independencia de (III)	Hilbert independencia de (IV) y (V)
	nuevos ámbitos del no
no euclideano	no arquimedeano no desarguesiano no conmutativo
intuición geométrica	rigor lógico

Pero obsérvese: Hilbert, *Anschauliche Geometrie*, Curso 1920-1921, Göttingen,
lecciones retomadas en libro: Hilbert & Cohn-Vossen, *Geometría intuitiva*, 1932

péndulo del entendimiento



"por una parte la tendencia abstracta,
que se propone encontrar relaciones *lógicas* entre el material múltiple a disposición (...)
por otra parte la tendencia intuitiva,
que se propone más bien alcanzar una clara percepción de los objetos y una
representación *concreta* de sus relaciones recíprocas"

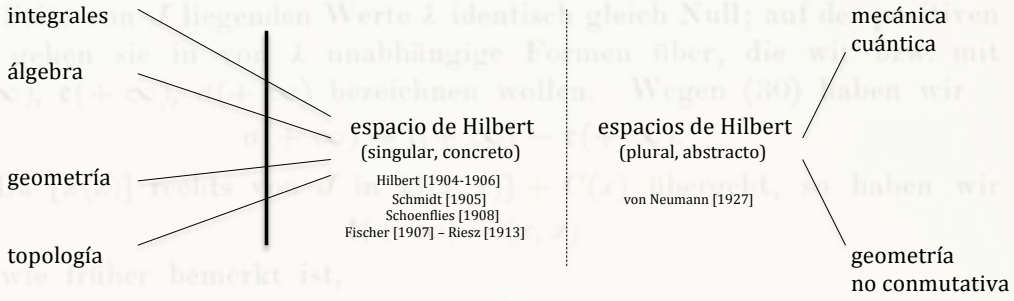
Comentarios de Poincaré (reseña de los *Grundlagen*, 1902):

"Hilbert ha quebrado las formas del análisis y de la aritmética, o mejor, las ha ampliado. Sus espacios ya no son *Zahlenmannigfaltigkeiten.* Los objetos que llama punto, recta o plano se tornan en seres puramente lógicos que es imposible representar". – "Lobachevski y Riemann rechazaban el postulado de Euclides, pero conservaban los axiomas métricos; en la mayoría de sus geometrías, Hilbert hace lo contrario".

SEMINARIO CONTINUO DE FILOSOFÍA DE LAS MATEMÁTICAS
2014-I – HILBERT

Mayo 14
Espacio de Hilbert (1904-1906)

(A) *Generación y proyección*.



(B) *Los artículos de Hilbert*.

Seis artículos sobre ecuaciones integrales [1904-1906], recopilados (con introducción adicional) en *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der Linearen Integralgleichungen* (Leipzig: Teubner, 1912). Siguiendo recuento de Dieudonné (*History of Functional Analysis*, 1981, pp. 105-115), los primeros cuatro artículos tratan de: (1) "pasaje al límite" en formas cuadráticas, aproximaciones, núcleos simétricos, valores propios y funciones propias, expansiones de Fourier generalizadas; (2) & (3) problema de Dirichlet, condiciones de frontera, transformada de Hilbert, aplicaciones; **(4) [1906]** sistemas infinitos de ecuaciones lineales, enlace con ecuaciones integrales, "pasajes al límite" en espacios l^2, transformaciones y proyecciones ortogonales, completitud, topologías fuerte y débil, operadores compactos, teoría espectral, espectro continuo –según Dieudonné, "obra maestra y uno de sus mejores artículos"–.

(C) *Las ideas matemáticas mayores*.

vaivén CONT / DISCR : ecuaciones integrales / sistemas lineales infinitos / formas cuadráticas

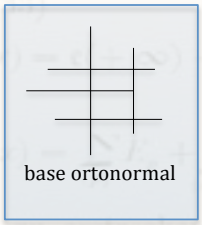
pasaje al límite : discreto & finito → discreto & infinito → continuo

teoría espectral : diagonalizaciones (valores y vectores propios), inversiones, proyecciones

(D) *Fondo metodológico y filosófico*.

Lautman [1937]

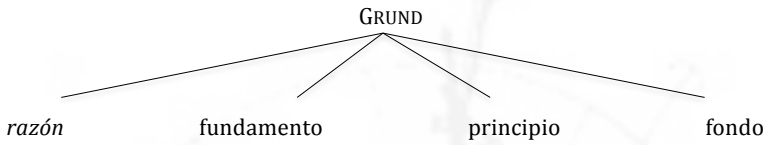
SOLUCIÓN = DESCOMPOSICIÓN



linealización en dimensión infinita

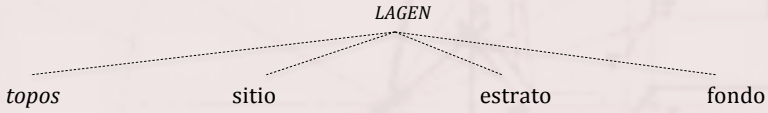
MIXTO ESTRUCTURAL

topologización en euclidianeidad infinita



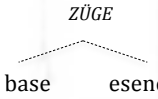
Kant:	Grund*sätz*	principio del sentido	sensibilidad
	Grund*gesetz*	ley fundamental de la razón	racionalidad

GRUND*LAGEN*



Riemann (1851):	*Grundlagen* (sitio, fondo) de la variable compleja
Cantor (1883):	*Grundlagen* (estrato, fondo) de los ordinales y cardinales
Frege (1884):	*Grundlagen* (fundamento, principio) de la aritmética
Hilbert (1899):	*Grundlagen* (fundamento, principio, sitio, estrato) de la geometría
Hilbert (1934-1939): (con Bernays)	*Grundlagen* (fundamento, principio, sitio, estrato) de la matemática

GRUND*ZÜGE*



Hilbert (1912):	*Grundzüge* (base) del análisis funcional
Hilbert (1928): (con Ackermann)	*Grundzüge* (base) de la lógica matemática

Mayo 21
Problemas matemáticos (1900)

[1900] "Mathematische Probleme"

(*Göttinger Nachrichten* 1900, pp. 253-297;
presentación parcial en el *II Congreso Internacional de Matemáticas*, París, Sorbona, Agosto 8 1900).

Introducción. (p. 407): levantamiento de los velos (Novalisiana...); 1900, gozne entre una "gran época" pasada y el futuro; vida del conocimiento a través de problemas; novedad, amplitud y libertad; criterios generales sobre un "buen" problema matemático: claridad, dificultad. (p. 408): "guía en los enredados caminos hacia ocultas verdades"; ejemplos de problemas fructíferos, Bernoulli, Fermat, Poincaré, Klein, Weierstrass; polaridad mente (libre) / naturaleza (ligada). (p. 409): orígenes experimentales; no obstante, independencia de la mente (combinación lógica, generalización, especialización, separación, recolección); Galois; pendularidad interior / exterior; analogía y armonía, como resultado de esa pendularidad; finitud de los métodos de prueba; rigor = sencillez. (p. 410): ventajas del rigor abstracto, curvas algebraicas, series de potencias, cálculo de variaciones; allende fundamentos analíticos, ideas imprescindibles de la geometría y la física; semiótica, nuevos signos para nuevas ideas; importancia de la figuración intuitiva. (p. 411): fundamentación axiomática de los signos figurativos; "rapidez, inconciencia, inseguridad (...) sensación", imprescindibles en la creación; Minkowski; importancia de una visión general, Cauchy, Kummer; dualidad generalización / especialización; resolución en lo particular y traducción hacia lo general. (p. 412): imposibilidad de pruebas; todo problema debe ser soluble o demostrado insoluble; "en matemáticas no hay *ignorabimus*".

Conclusión. (p. 436): riqueza, variedad y extensión de la matemática contemporánea (1900); unidad de las matemáticas, "un todo indivisible, un organismo cuya vitalidad está condicionada por la conexión de las partes"; amplitud ligada a organicidad y claridad; optimismo final.

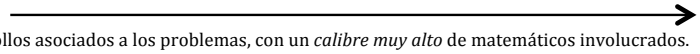
Las referencias de páginas remiten a la traducción inglesa *Mathematical Problems* (trad. Mary Winston, [1902]; reedición *Bulletin AMS* 37 (4) (2000): 407-436).
Subrayados aparecen los problemas presentados en París. En **negritas** se marcan los problemas más importantes. En **rojo**, problemas específicos abiertos.
Los nombres en *itálicas* indican Medallistas Fields y/o Premios Abel (en el caso de *Nash*, Premio Nobel).

número problema	*contenido matemático*	*resolución / readecuación*	*conceptualización*
1	***hipótesis del continuo***: *determinación del cardinal* $2^{\aleph_0}$	1. consistencia (Gödel 1938): bajo V=L, $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ 2. independencia (*Cohen* 1963): bajo forcing, $2^{\aleph_0}$ cuasi-libre 3. búsqueda de nuevos axiomas: deducción de $2^{\aleph_0} = \aleph_2$ (Gödel; Woodin 2010)	fundamentos real / ideal platonismo pragmatismo
2	*consistencia (finitaria) de los* ***axiomas de la aritmética***	1. incompletitud (Gödel 1931) 2. consistencia infinitaria (Gentzen 1936)	limitaciones teoría de la prueba
3	*descomposición (finitaria, poliédrica) y recomposición de poliedros distintos*	1. no realizable (Dehn 1900)	limitaciones congruencias
4	*geodésicas en espacios métricos generales*	1. problema genérico 2. espacios Desarguesianos (Hamel 1903)	multiverso métrico
5	*teoría de* ***grupos de Lie*** *sin hipótesis de diferenciabilidad*	1. todo grupo localmente euclideano es grupo de Lie (Gleason, Montgomery-Zippin 1952) (prefiguraciones: Brouwer, von Neumann, Pontrjagin)	enlace Cont / Difer bajo Grupos
6	*tratamiento matemático de los* ***axiomas de la física***	1. problema genérico 2. probabilidad (Kolmogorov 1933) 3. mecánica cuántica (von Neumann 1927, Mackey 1957, ... , *Connes* 1973, *Witten* 1980s, *Kontsevich* 1992) 4. ecuación de Boltzmann (... , *Villani* 2009)	dialécticas act (fin) / pot (inf) real / ideal difuso / exacto Cont / Discr
7	*irracionalidad y* ***trascendencia*** *de números específicos*	1. trascendencia (Gelfond 1929, Gelfond-Schneider 1934, *Baker* 1966)	acceso lineal a "fondo oscuro"
8	***hipótesis de Riemann (HR)*** *conjeturas sobre números primos*	1. (HR): el mayor problema aún abierto en matemáticas (avances: Artin, Hasse, Weil, *Deligne*, ... , *Connes*) 2. aritmética aditiva y diofántica (... , *Szméredi*, *Tao*)	1er mixto mayor Aritm / VarCompl / Alg / Geom
9	*leyes generales de reciprocidad en campos de números*	1. teoría de cuerpos de clases (Takagi, Artin 1927) 2. cohomología galoisiana (Nakayama, Artin, *Tate*)	enlace Aritm / Alg / Difer

10	*solubilidad de ecuaciones* ***diofánticas***	1. irresolubilidad general (Robinson 1950's, Davis, Matiyasevich 1974)	recursividad acotación
11	*aritmética de formas cuadráticas (infinitarias, campos arbitrarios)*	1. principios de Hasse (ℚ) (1924) y Siegel (ℤ) (1937) 2. geometría de Witt (1937) y adeles (Weil 1961)	enlace Aritm / Alg / Geom
12	***extensiones abelianas*** *y modularidad*	1. teoría de cuerpos de clases (Takagi 1920) 2. variedades de Shimura (1960's) 3. programa de Langlands (casos no abelianos) (1967)	2º mixto mayor Aritm / VarCompl / Alg / Difer
13	*irresolubilidad ecuación grado 7 con funciones continuas de dos variables*	1. representación *cont(n)* / *cont(3)* (Kolmogorov 1957) 2. reducción a *cont(2)* (Arnold 1957)	limitaciones representabilidad
14	*subanillos finitamente generados de campos de invariantes*	1. linealización (Zariski 1954) 2. existencia de anillo no fin. gen. (Nagata 1959) 3. geometría de invariantes (*Mumford* 1965)	analogía (inválida) teorema de la base
15	*geometría enumerativa (cálculo de Schubert)*	1. algebraicidad (Ehresmann 1934), topologización (Hodge 1942), singularización (*Thom* 1960's)	estratificación reducibilidad
16	*estudio de ciclos límite de una ecuación diferencial algebraica*	1. separación polinómica (Dulac 1923)	multiverso cualitativo
17	*representación de funciones racionales positivas como suma de cuadrados*	1. validez en caso ℝ (Artin 1926) 2. teoría de campos reales cerrados (Artin-Schreier)	polin(-) *vs.* racio(+) positividad iterada
18	*descomposiciones del espacio euclideano*	1. grupos discretos euclideanos (Bieberbach 1910) 2. teselaciones no estándar (espacio: Reinhardt 1928; plano: Heesch 1935) 3. empaques densos de bolas (prueba parcial por computación, Hales 1998)	ampliaciones congruencias
19	*soluciones analíticas para cálculo de variaciones regular*	1. resultados positivos: De Giorgi (1956), *Nash* (1957) 2. resultados negativos: De Giorgi (1968)	solidaridad holomorfa
20	*solubilidad de* ***problemas de frontera*** *para ecuaciones diferenciales elípticas*	1. analiticidad de soluciones (Bernstein 1904) 2. acotaciones y reducciones (Leray-Schauder 1934) 3. extensiones tipo Bernstein (*Bombieri* 1969)	multiverso elíptico
21	*existencia de ecuación diferencial lineal con grupo de monodromía prescrito*	1. inicios positivos (Plemelj 1908), (Birkhoff 1913) 2. trad. GAGA (*Serre* 1956) y resolución (*Deligne* 1970) 3. fines negativos (Anosov & Bolibruch 1989)	singular/armónico y general perfecto
22	*uniformización por medio de funciones automorfas*	1. bajo principio de continuidad (Koebe 1907) 2. caso general (Brouwer 1911) 3. extensiones (Griffiths 1971)	enlace Mult / Uno
23	*extensiones de los métodos del cálculo de variaciones*	1. métodos directos (Tonelli, Sobolev) 2. EDP (*Lax*, ..., *Lions*)	minimización saturación

A. La *unidad* de la matemática y los *enlaces* de sus subregiones se encuentran en el *fondo* de los problemas mayores.
B. La tendencia general confirma el "no hay *ignorabimus*" de Hilbert: todo tiende a resolverse (en positivo, o negativo).
C. La fuerza del *vidente* se observa en las grandes concepciones (*introd., concl.*) y en la *sencilla* expresión de problemas *profundos*.
D. No obstante, cierta desconexión ([3, 18], [9, 11 & 12], [19, 20 & 23], [21 & 22]) y un estilo irregular delatan una *redacción rápida*.
E. Núcleos temáticos centrales:
(*reflejos* ¡del propio Hilbert!
multiverso en el universal)

área	*álgebra*	*aritmética*	*geometría*	*análisis*	*física*	*lógica*
problema	14, 17	7, 8, 9, 11, 12	3, 4, 15, 18, 21, 22	5, 13, 16, 19, 20, 23	6	1, 2, 10



F. Se tiene una enorme amplitud de desarrollos asociados a los problemas, con un *calibre muy alto* de matemáticos involucrados.
G. La pléyade de esos matemáticos representa en gran medida un verdadero *cubrimiento* de mucho de lo mejor del siglo XX.
H. La escuela matemática *japonesa* emerge de manera impactante gracias a la resolución parcial de algunos problemas.

Referencias secundarias. Felix Browder (ed.), *Mathematical Developments arising from Hilbert Problems*, Providence: AMS, 1976. Jeremy Gray, *The Hilbert Challenge*, Oxford: Oxford University Press, 2000.

Junio 4
Los fundamentos de la lógica y la aritmética (1917-1928)

Precedentes.
(1) *Independencia* en teoría de invariantes (1893); (2) *Existencia como consistencia* en manuscritos (c. 1893); (3) *Consistencia e independencia* en fundamentos de la geometría (1899); (4) Correspondencia con Cantor sobre *multiplicidades inconsistentes* (1897-1898); (5) Programa de prueba de *consistencia del "más pequeño infinito"* (1904-1905); (6) Estudios sobre Russell y el *logicismo* (1913-1917).

Cursos, conferencias, ***alumnos****.*
[1917-1918] *Curso sobre sistemas lógicos*: *(i)* cadena de sistemas desde el cálculo proposicional hasta la lógica de segundo orden; *(ii)* estudio metamatemático de la cadena.
[1918] *Tesis de Habilitación* de **Bernays**: *(i)* estudio de la lógica proposicional de *Principia Mathematica*; *(ii)* enunciados del programa metamatemático de Hilbert.
[1920-1921] *Cursos sobre cálculos lógicos*: *(i)* matemática constructiva (Kronecker, Brouwer, Weyl); *(ii)* versiones finitistas estrictas de teoría de números; *(iii)* pruebas restringidas de consistencia.
[1921-1922] *Curso sobre teoría de la prueba* (primera aparición de la "Hilbertsche Beweistheorie"): *(i)* separación entre inducción matemática formal e inducción metamatemática; *(ii)* fragmentación y estratificación.
[1922] *Conferencia* (Leipzig): *(i)* aparición de la función lógica τ (dual del posterior ε, 1923); *(ii)* tratamiento de los cuantificadores en vistas de pruebas de consistencia de la aritmética.
[1924] *Tesis Doctoral* de **Ackermann**: consistencia de la aritmética primitiva recursiva (refinamiento por **von Neumann**, "Zur Hilbertschen Beweistheorie", 1927, y por **Herbrand**, "Sur la non-contradiction de l'arithmétique", 1931).
[1928] *Conferencia* (Congreso Internacional de Matemáticos, Bologna): *(i)* enunciado (falso) de prueba de consistencia de la aritmética (Ackermann, von Neumann); *(ii)* pregunta acerca de la completitud de la lógica de primer orden.

Referencias detalladas en David Hilbert, *Lectures on the Foundations of Arithmetic and Logic 1917-1933* (eds. Ewald, Sieg), Berlín: Springer, 2013.

Principales artículos [1922, 1923, 1926] ***y libros*** [1928, 1934-1939]: ver resúmenes en hojas siguientes.

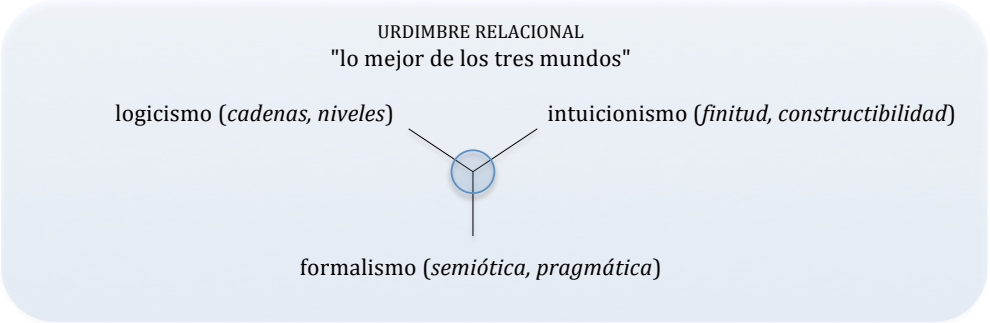
[1928] *Elementos [= bases] de la lógica teórica*

(con William Ackermann, *Grundzüge der theoretischen Logik*, Berlín: Springer, 1928).

Retoma en gran medida el curso de [1917-1918]. Capítulos: (1) cálculo de proposiciones (pp. 13-53); (2) cálculo de clases (pp. 55-77, semántica conjuntista); (3) cálculo restringido de predicados (pp. 79-159, *primera presentación sistemática de la lógica clásica de primer orden*, formas normales, metateoremas); (4) cálculo generalizado de predicados (pp. 161-204, segundo orden, paradojas, teoría de tipos – "cálculo de niveles").

La cuarta edición (revisada por Ackermann en 1958) añade *secuentes* (**Gentzen** 1934, pp. 36-41), cálculo de proposiciones *intuicionista* (pp. 41-47), separa sintaxis y semántica, estudia *decidibilidad* (afirmativa en caso monádico, negativa en caso general, **Church** 1936) (pp. 138-150). Acerca de *completitud*: "Haremos notar que K. Gödel mostró por primera vez de modo explícito la completitud del cálculo de predicados, aún cuando estaba ya contenida en las investigaciones de J. Herbrand" (p. 121).

Referencias de páginas a la traducción española:
David Hilbert & William Ackermann, *Elementos de lógica teórica* (4ª edición, ed. Ackermann, 1958), Madrid: Tecnos, 1962.



Dos artículos ejemplares:

[1922] "La nueva fundamentación de las matemáticas"

("Neubegründgung der Mathematik", conferencia en Copenhague/Hamburgo 1922, publicación en *Seminar der Hamburgischen Universität* 1 (1922): 157-177).

fragmento del texto	*contenido + conceptualización*
Introducción (pp. 37-44)	"En las matemáticas no deben tener cabida las verdades a medias" – "los fundamentos pueden ser objeto de una clarificación y un conocimiento plenos" (p. 37). Posición de Weyl en los fundamentos, y crítica de ésta ("Weyl ve fantasmas") (pp. 38-40). Problema de *consistencia de los axiomas* ("nos ha ocupado desde hace más de 20 años") (pp. 40, 42-44). Procesos de Weyl y Brouwer: "dictatoriales", "desmembramientos, amputaciones", "golpe de Estado" (pp. 40-41). Objetivo: "dar un fundamento seguro a las matemáticas", mediante el *método axiomático* (p. 41). Respuesta a la crítica autorreferente de Poincaré (p. 43). Fundamentaciones inconclusas de Frege y Dedekind (p. 43). Teorías axiomáticas "de gran profundidad" de Zermelo y de Russell (p. 44).
Signos elementales (pp. 44-49)	"Existencia en la representación de objetos extralógicos discretos" (p. 44). Enfoque adecuado y necesario: "*en un principio era el signo*" (p. 45). Numerales y descripción de fórmulas aritméticas elementales (separación, descomposición, cancelación) (pp. 45-46). "Nivel superior de observación" y "traslado a otro sitio" (metamatemática, ver p. 59) para formalizar la matemática (pp. 47-48). Tres tipos de signos (sintaxis) y su "manejo" (pragmática) (pp. 48-49).
Fórmulas, axiomas, deducciones, metamatemática, consistencia (pp. 50-62)	Términos ("funcionales") y fórmulas (pp. 49-50). "A ciertas fórmulas que sirven como cimiento del edificio formal de las matemáticas se les conoce como axiomas" (p. 50). Variables libres, reglas para el cuantificador universal (p. 51). Axiomas para la suma, *modus ponens*, consecuencias aritméticas elementales y *obstrucciones* asociadas (pp. 51-52). *Definición de demostración* (p. 53). *Relatividad* de las pruebas sobre *bases* axiomáticas (p. 53). "Nos vemos obligados a desarrollar una *teoría de la demostración*" (p. 53). *"Teoría real original" y formalismo sustituto* (pp. 54, 59). Introducción de la desigualdad (p. 54). *Definición de consistencia* (p. 54). *Prueba de consistencia* (sobre lógica implicativa) de axiomas para la suma (pp. 55-57). Cuantificador existencial mediante funcional de lugar (prefiguración de τ, ver artículo [1923]) (p. 58). "Resulta necesario llevar a cabo una construcción simultánea de la aritmética y de la lógica formal" (p. 59). Papel de la *metamatemática* (p. 59) y "alternación constante de dos niveles" (matemática - metamatemática) (p. 59). Axiomas para la aritmética extendida (variaciones de PA) (pp. 60-61). "La demostración de consistencia es posible" (p. 61), aunque "el paso esencial (...) constituye una tarea inconclusa" (!) (p. 61), posiblemente desarrollable mediante axiomas sobre funciones de funciones (p. 62).

[1923] "Los fundamentos lógicos de las matemáticas"

("Die logistische Grundlagen der Mathematik", conferencia en Sociedad Alemana de Ciencias 1922, publicación en *Mathematische Annalen* 88 (1923): 151-165).

fragmento del texto	*contenido + conceptualización*
Introducción (pp. 63-65)	"Propósito principal eliminar de manera definitiva cualquier duda en relación a la confiabilidad de la inferencia matemática", mediante una *teoría de la demostración* (p. 63). Uso de la teoría para "dar una base firme" al axioma de elección (p. 64). "Idea fundamental de mi teoría de la demostración": tres estratos *(i)* matemática real, *(ii)* calco formal en un conjunto de fórmulas y *(iii)* metamatemática que estudia ese conjunto de fórmulas (pp. 64-65). "Transición constante en dos sentidos": demostración *formal versus* axiomatización *concreta* (p. 65). Lo verdadero consiste en los "resultados *relativos* a la demostrabilidad" (p. 65).
Axiomas y cuantificadores (pp. 66-70)	Axiomas de implicación, negación, igualdad, sucesor/predecesor (p. 66): pensamiento de "totalidades finitas" (p. 67). Debe irse "más allá de la esfera de la lógica finitaria", gracias a "axiomas adicionales de carácter transfinito" (p. 67). Allende el tercio excluso para totalidades finitas, *emergencia de los cuantificadores para el estudio del transfinito* (p. 67). Dualidad de los cuantificadores universal y existencial (p. 68). *Errores* matemáticos en el paso inescrupuloso de lo finito a lo infinito (p. 68). Problema: *¿cómo dominar el "manejo libre de lo transfinito" a partir de lo finito*? (p. 69). *Función universal de contraejemplo* τ y *axioma de transfinitud* (p. 69). Definiciones de universal y existencial a partir de τ (p. 70; ojo: error en la traducción).
Consistencia (pp. 71-74)	Problema de la consistencia: primera parte, axiomas "finitarios" (p. 71), segunda parte, *axioma de transfinitud* (pp. 72-74). Ideas centrales en el caso de la transfinitud: función de *mínimo* contraejemplo (p. 72), substituciones recursivas, regreso infinito *à la* Fermat (p. 73). Distinción: argumento circular *versus* círculo vicioso (p. 74).
Transfinitud, funciones de funciones (pp. 74-81)	Analogía fundamental: finitud/*transfinitud* ≡ reales/*imaginarios* (p. 74). Éxito de las extensiones (lógica y algebraica): *simplicidad* y *clausura* (p. 74). *Uso* (pragmático) de transfinitud en las demostraciones: caso de pruebas alternas del teorema de la base de Hilbert en teoría de invariantes; crítica a Gordan (p. 75). *Función de minimización* μ y *fundamentación de la aritmética*: uso de μ para *probar* el principio de inducción completa (p. 76). *Fundamentación del análisis*: uso de τ para *probar* el teorema de la cota superior (recursiones simultáneas y funciones transfinitas, pp. 76-78). "Demostración" del axioma de elección para subconjuntos de reales (pp. 79-80). "Llevar a la práctica en detalle las ideas básicas que aquí hemos delineado (...) permite la fundamentación completa del análisis, a la vez que sienta las bases para una fundamentación de la teoría de conjuntos misma" (p. 81).

Referencias de páginas a la traducción mexicana, David Hilbert, *Fundamentos de las matemáticas*, México: UNAM - Mathema, 1993.

Junio 11

Sobre el infinito (1926) – Fundamentos de las matemáticas (1934-1939)

[1926] "Sobre el infinito"

("Über das Unendliche", conferencia en Seminario de Matemáticas de Vestfalia, Münster 1925, publicación en *Mathematische Annalen* 95 (1926): 161-190).

fragmento del texto	*contenido + conceptualización*
Problema del infinito (pp. 83-87)	Weierstrass: logros y limitantes (p. 84). Problema central: "reemplazar las argumentaciones con lo infinito por procesos finitos" (p. 84). *Consistencia = existencia*: caso de los números imaginarios (p. 85). *Guía pragmática*: "fecundidad en resultados" (p. 85), "objetos susceptibles de una *visión global completa de todas sus partes*" – "concepción filosófica fundamental" (p. 95), "por sus frutos los conoceréis" (p. 109). *Contradicción*: únicamente pensable en un sistema de afirmaciones e hipótesis (p. 85). Elucidación del infinito: "cuestión de honor para el entendimiento humano" (p. 85). *Inexistencia de infinitos físicos* (infinitamente pequeño, p. 86; infinitamente grande, p. 87). "Podría ocurrir que el lugar propio y justificado del infinito no sea la realidad, sino *nuestro pensamiento*" (p. 88).
El infinito matemático (pp. 88-95)	"El útil e importante método de los *elementos ideales* nos ofrece una interpretación y una concepción enteramente distintas del concepto de infinito" (p. 88). Ejemplos: *puntos al infinito, números complejos, ideales algebraicos* (p. 89). Análisis matemático: "rama más ingeniosa y más refinadamente elaborada de las matemáticas (...) no es sino una sinfonía del infinito" (p. 89). Cantor y la *teoría de números transfinitos* (pp. 90-94): "La flor más admirable que el espíritu humano ha producido" (p. 90) – "*Nadie podrá expulsarnos del paraíso que Cantor creó para nosotros*" (p. 94). "Kant nos enseña (...) que las matemáticas poseen un contenido propio e independiente de la lógica, y que, en consecuencia, ésta no puede constituir por sí sola un fundamento para aquéllas. Se sigue de esto que los intentos de Frege y Dedekind estaban desde un principio condenados al fracaso" (p. 95).
Teoría formal de números (pp. 96-102)	Construcción del "aparato" aritmético mediante enfoques "concreto" y "finitista" (p. 96). Numerales y su entorno pragmático ("comunicación de información") (pp. 96-97). Existencia creciente de primos: "salto a la esfera de lo transfinito" (pp. 97-98). Cuantificador existencial como *enunciado parcial* (p. 98). Necesidad de revisión de los cuantificadores (p. 99). "*El genial método de los elementos ideales nos ha salvado*" – "Tenemos ahora que *añadir a los enunciados finitos los enunciados ideales*" (p. 100). Procesos de *crecimiento analógico* (numerales/enunciados = variables algebraicas/fórmulas) (p. 101). Fórmulas como "*objetos ideales de nuestra teoría*" (p. 102).
Cálculos lógicos, metamatemática y problema del continuo (pp. 103-121)	Programa de formalización de los elementos ideales, basado en "una especie de *armonía preestablecida*", provista por el "cálculo lógico" (p. 103). Rico "lenguaje de signos" (p. 103). Un "manejo externo según reglas" (pragmática) permite "el tránsito de un tratamiento intuitivo e ingenuo a uno formal" (p. 104). Axiomas orientados *por* un programa (pp. 104-105). Axioma de transfinitud, vía operador ε (p. 106). "Existe una condición única, aunque absolutamente necesaria, para la aplicación del método de los elementos ideales, a saber, la *prueba de consistencia*" (p. 106). Analogía: no racionalidad / no contradicción (p. 107). La "*teoría de la demostración, basada en el método de los elementos ideales*" debe proveer la consistencia de la aritmética (p. 107). *"¡En las matemáticas no hay ignorabimus!"* (p. 108). Presentación del *problema del continuo*, con su "belleza interna", y afirmación de que su solución "puede realizarse con la teoría que hemos desarrollado" (!) (p. 109). Ideas de una "prueba" (afirmativa) de la hipótesis del continuo (HC): *(i)* Lema I (eliminabilidad de usos de ε en una supuesta prueba de la falsedad de HC) (p. 110), *(ii)* introducción de *tipos* transfinitos, recursión transfinita y *niveles* de tipos (pp. 110-113), *(iii)* estudio de los métodos de construcción de funciones numéricas: substitución, *recursión*, función de Ackermann (pp. 114-116), *(iv)* "Los *tipos variable* constituyen un enlace que hace posible establecer una correspondencia entre las funciones de una variable numérica y los números de la segunda clase" (p. 117), *(v)* comparación de los "procesos de generación" de la jerarquía recursiva (p. 117) y de los números de segunda clase (p. 118), *(vi)* Lema II (eliminabilidad de recursiones transfinitas en las definiciones de funciones numéricas) (p. 120). Conclusiones finales: "El infinito no tiene ningún tipo de realidad" – "El papel que resta al infinito es el de una idea, según la concepción kantiana de ésta, como un concepto de la razón que supera toda experiencia y por medio del cual se complementa lo concreto en el sentido de una totalidad" (p. 121).

Referencias de páginas a la traducción mexicana, David Hilbert, *Fundamentos de las matemáticas*, México: UNAM - Mathema, 1993.

[1934-1939] *Fundamentos de las matemáticas*

con Paul Bernays, *Grundlagen der Mathematik*, I (1934), II (1939), Berlín: Springer (2ª ed. (Bernays), 1968-1970). Tratado mayor: cerca de 1000 páginas.

(A). *Volumen 1* – desarrollo "intuitivo" de la teoría de prueba. Cap. 1: problema de no contradicción en aproximaciones axiomáticas. Cap. 2: razonamiento finitista y sus límites. Cap. 3: cálculo proposicional. Cap. 4: cálculo de predicados. Cap. 5: completitud del cálculo monádico de predicados. Cap. 6: no contradicción en dominios infinitos, método de Herbrand-Presburger. Cap. 7: definiciones recursivas, consistencia de la aritmética con inducción libre de cuantificadores. Cap. 8: aritmética plena (PA), problema de su consistencia y decidibilidad, representabilidad de funciones recursivas, ι-eliminabilidad.

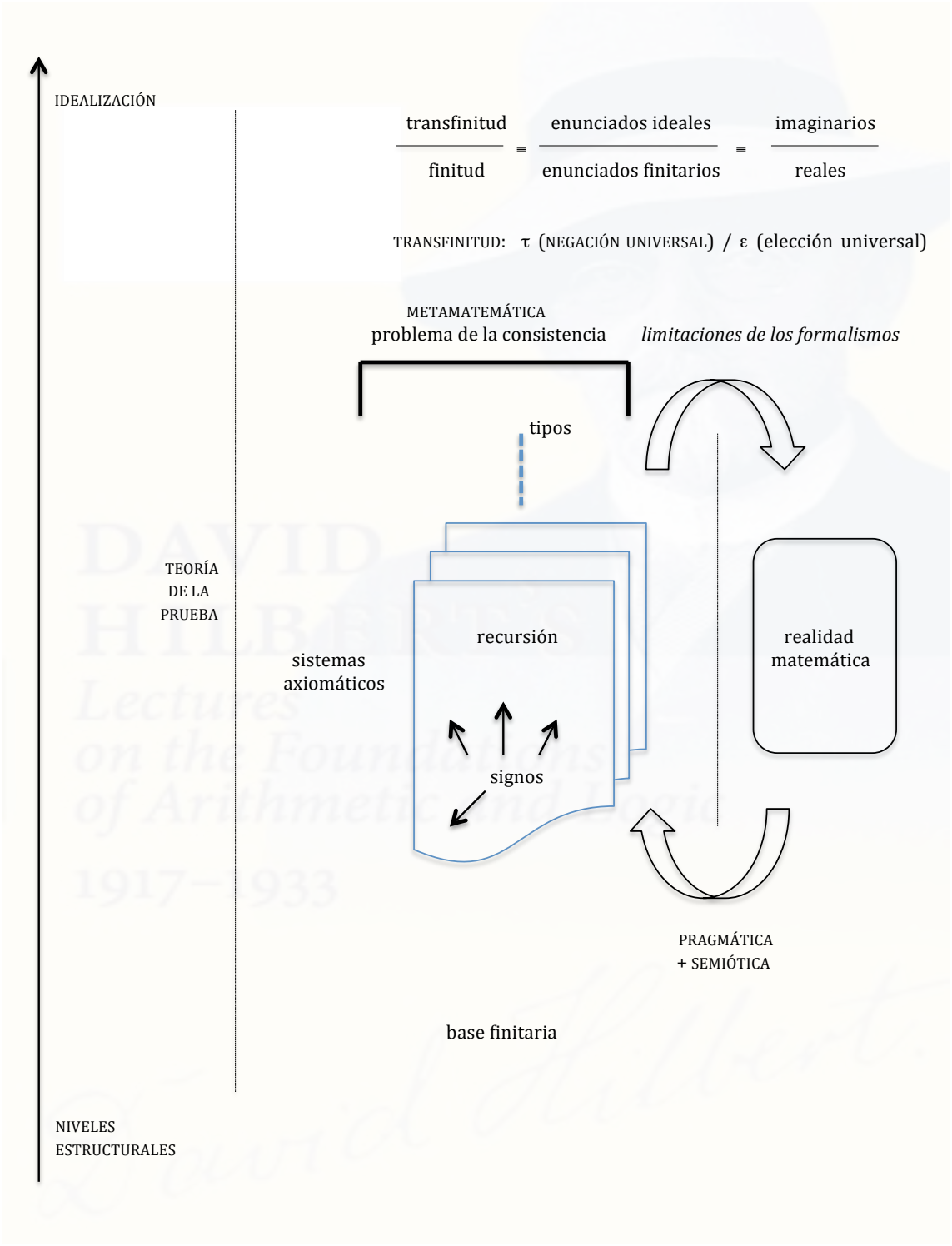
(B). *Volumen 2* – desarrollo "formal" de la teoría de prueba, usando el símbolo ε (dual de τ [1923]). Cap. 1: ε y los cuantificadores. Cap. 2: ε y la teoría de números. Cap. 3: ε y el formalismo lógico, pruebas de Löwenheim-Skolem y de completitud del cálculo de predicados (Gödel). Cap. 4: aritmetización de la metamatemática, método de Herbrand. Cap. 5: teoremas de limitación. [Segunda edición: cinco suplementos, ver (D) abajo].

(C). El *símbolo* ε, su axioma $[A(a) \rightarrow A(\varepsilon_x A(x))]$ y aplicaciones a *no contradicción*: cálculo de predicados, extensiones "estrictas", geometría euclideana y no euclideana, aritmética libre de cuantificadores (vol. II, 59-99).

(D). Aparición progresiva en el texto de técnicas y teoremas de limitación:

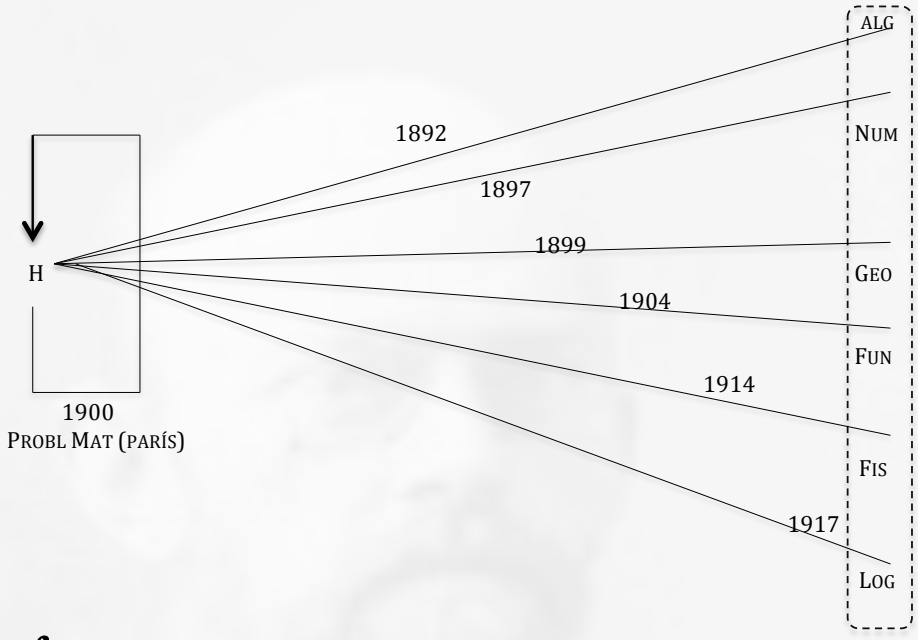
- *indefinibilidad de la verdad*: Tarski (vol. 2, 314-330)
- *incompletitud de la aritmética*: Gödel (vol. 2, 332-355)
- *consistencia transfinita de la aritmética*: Gentzen (vol. II, 431-446)
- *funciones recursivas*: Herbrand-Gödel (Supl. II, 1970; vol. II, 465-489)
- *indecidibilidad del cálculo de predicados*: Church (Supl. II, 1970; vol. 2, 489-494)
- *consistencia transfinita de la aritmética*: Kalmár (Supl. V, 1970; vol. 2, 573-592), Ackermann (Supl. V, 1970; vol. 2, 592-610).

Referencias de páginas a la traducción francesa, David Hilbert & Paul Bernays, *Fondements des mathématiques (2 vols.)*, París: L'Harmattan, 2001. Análisis en [Sieg & Ravaglia 2004].


IDEALIZACIÓN
transfinitud / finitud ≡ enunciados ideales / enunciados finitarios ≡ imaginarios / reales
TRANSFINITUD: τ (NEGACIÓN UNIVERSAL) / ε (elección universal)
METAMATEMÁTICA
problema de la consistencia
limitaciones de los formalismos
tipos
TEORÍA DE LA PRUEBA
sistemas axiomáticos
recursión
signos
realidad matemática
PRAGMÁTICA + SEMIÓTICA
base finitaria
NIVELES ESTRUCTURALES

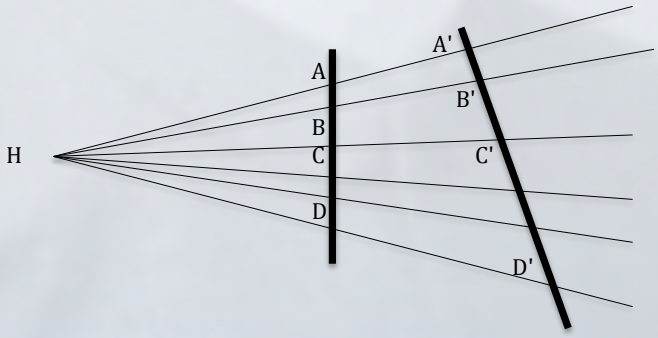
Junio 18
Diagramas de la creatividad en Hilbert

(I) HILBERT "PROYECTIVO"



$\int$ "INTEGRAL" HILBERTIANA: *todo* el saber matemático

Problema:
estudio de relaciones "anarmónicas" entre momentos de desarrollo de las ramas matemáticas



A, A', B, B', C, C', D, D' : desarrollos matemáticos específicos en $rama_n$ ($1 \leq n \leq 6$)

La invarianza AC.BD / AD.BC podría expresar enlaces sofisticados del pensamiento matemático

(II) HILBERT "ESTRUCTURAL"

encajes progresivos: *continuidad* del pensamiento de Hilbert
(en **negrita**: algunas de las creaciones mayores)

FUNDAMENTOS DE LA LÓGICA Y LAS MATEMÁTICAS (1917-1934)

transfinitud (τ, ε) + idealización
axiomatización + **teoría de la prueba** + **metamatemática**

base: pruebas finitarias

ANÁLISIS FUNCIONAL (1904-1907)

espacios de Hilbert: linealización y euclidianeidad infinitas

base: ortonormalidad

FUNDAMENTOS DE LA GEOMETRÍA (1899)

geometrías del *no*: no arquimedeana, no pascaliana, **no desarguesiana**

base: subcampos de números algebraicos

TEORÍA ALGEBRAICA DE NÚMEROS (1894-1897)

teoría de cuerpos de clases

base: extensiones galoisianas

INVARIANTES (1890)

teorema de la base

GEOMETRÍA ALGEBRAICA (1893)

Nullstellensatz

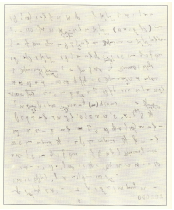
PROCEDIMIENTOS HILBERTIANOS "UNIVERSALES"

- búsqueda de bases (*Züge*) para lugares (*Lagen*) donde se dan expansiones de la razón (*Grund*)
- correspondiente determinación de axiomas (y consistencia) para estructuras matemáticas canónicas
- desarrollo inventivo en las MIXTURAS/MEDIACIONES/ESTRATIFICACIONES/RAMIFICACIONES entre real e ideal
- énfasis en abstracciones ampliativas como herramientas de simplificación del entendimiento

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA – SEDE BOGOTÁ – DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

EPISTEMOLOGÍA E HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS
SEMINARIO CONTINUO DE FILOSOFÍA DE LAS MATEMÁTICAS
2014-II
GÖDEL



"Dedicarse a la filosofía es saludable (...)
Posee el efecto que el color aparece más brillante, es decir, que la realidad aparece con mayor claridad" [Gödel, c. 1954]

1	*(11 ago)*	*Mapa del seminario: el explorador de los filos del abismo.*
2	*(13 ago)*	*Completitud e incompletitud: grandes conceptos y problemas.*
3	*(20 & 25 ago)*	*Intuicionismo y consistencia relativa: grandes conceptos y problemas.*
4	*(27 ago & 1 sep)*	*1930: el entorno filosófico, técnico y biográfico.*
5	*(3 & 8 sep)*	*La tesis doctoral: completitud en primer orden (1929).*
6	*(10 & 15 sep)*	*La incompletitud de la aritmética (1930-1931): (I) estructura.*
7	*(17 sep)*	*La incompletitud de la aritmética (1930-1931): (II) representabilidad.*
8	*(1 & 6 oct)*	*La lógica intuicionista (1932 / 1958).*
9	*(15 & 20 oct)*	*Consistencia relativa: el universo construible (1938).*
10	*(22 & 27 oct)*	*El problema del continuo (1947 / 1964).*
11	*(29 oct)*	*Filosofía de los fundamentos de las matemáticas (1951 / 1959).*
12	*(5 & 10 nov)*	*La prueba ontológica de la existencia de Dios (1970).*
13	*(12 nov)*	*Diagrama de la creatividad en Gödel.*

SALÓN 404-212	miércoles	lunes subsiguiente (cuando indicado)
14.00-16.00	presentación del coordinador	presentaciones de estudiantes y complementos

Prerrequisitos.
Pregrado de Matemáticas: madurez matemática, tipo *Grupos y Anillos*, *Topología* o equivalente. Posgrado de Matemáticas: abierto. Otras Carreras y Posgrados, acercarse a discutir la idoneidad (o no idoneidad) con el instructor.

Evaluación.
Cada estudiante inscrito al **curso** *Epistemología e historia de las matemáticas* deberá proponer, a mediados de semestre, el tema de un ensayo escrito (E), que desarrollará en la segunda mitad del semestre, y obtendrá también una nota de participación (P), asociada a las presentaciones complementarias de los días lunes. La nota final del curso se obtendrá mediante la fórmula 0.3P + 0.7E.

Bibliografía.
Kurt Gödel, *Collected Works* (ed. Feferman), 5 vols., Oxford: Oxford University Press, 1986-2003.
Kurt Gödel, *Ensayos inéditos* (ed. Rodríguez Consuegra), Barcelona: Mondadori, 1994.
Kurt Gödel, *Obras completas* (ed. Mosterín), Madrid: Alianza, 1981.

Fernando Zalamea - Oficina: 405-327 - Tel. (oficina): 3165000-13214
Mail: fernandozalamea@gmail.com - Web: www.docentes.unal.edu.co/fzalameat/

SEMINARIO CONTINUO DE FILOSOFÍA DE LAS MATEMÁTICAS
2014-II – GÖDEL

Agosto 13
Completitud e incompletitud: grandes conceptos y problemas

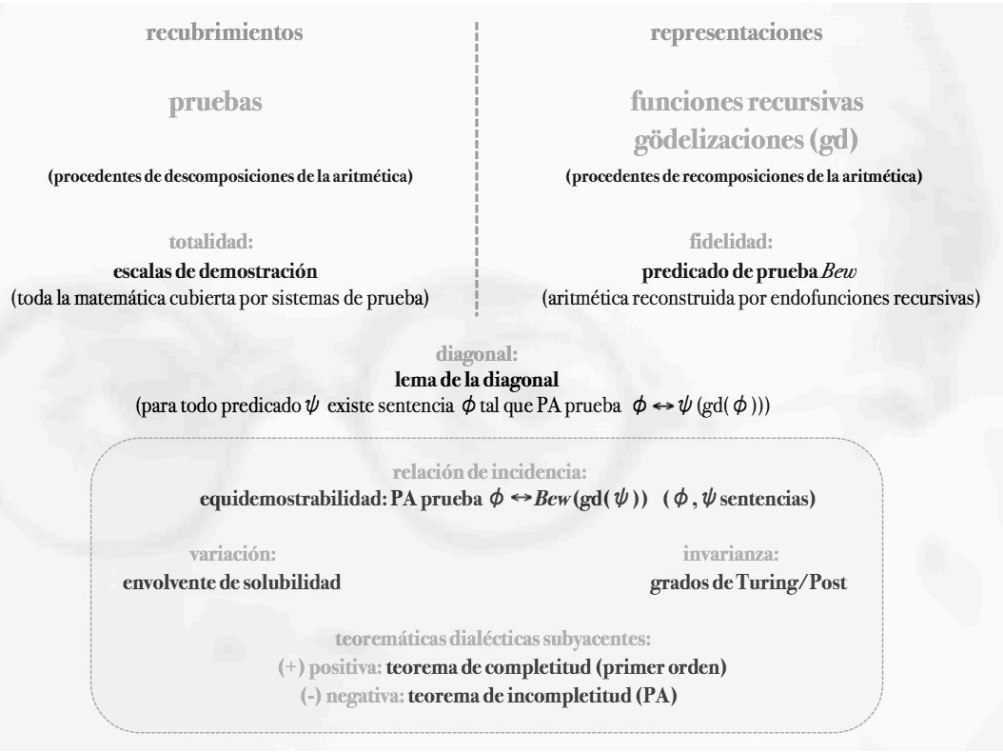
(I) EL MÉTODO

REALIZAR LO INMATERIAL

REFINAMIENTO PROGRESIVO DEL ESTRUCTURALISMO PLATÓNICO DE LA MATEMÁTICA

CONCIENCIA DEL VAIVÉN PENDULAR SÍ/NO Y EXPLICITACIÓN DEL (DES)CONTROL DE SUS BORDES

CONSTRUCCIÓN DE ESTRATOS DE REPRESENTACIÓN, PRUEBAS EFECTIVAS E IMPOSIBILIDADES DE PRUEBA

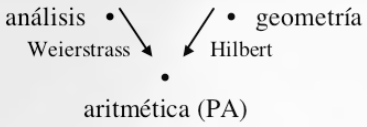


(II) BORDES LÓGICOS

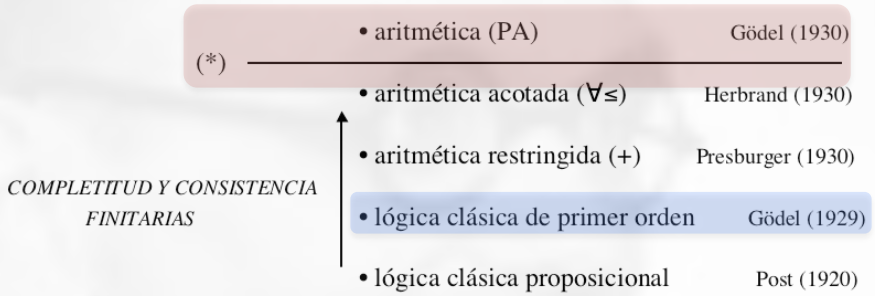
Completitud (+, azul)

Incompletitud (-, rojo)

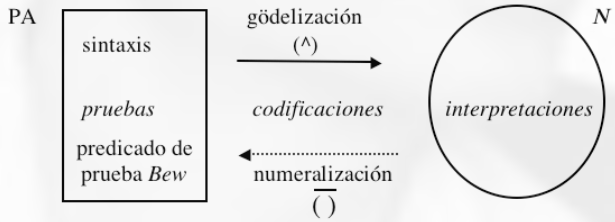
• Programa de Hilbert:
1. demostración de consistencias relativas entre teorías diversas
2. demostración, con medios finitarios, de consistencia y completitud de la aritmética.



CONSISTENCIA RELATIVA



COMPLETITUD Y CONSISTENCIA FINITARIAS



1. Predicado de prueba: se construye *Bew* tal que: PA $\vdash \varphi \Leftrightarrow N \models Bew(x)\ [\ \overline{\hat{\varphi}}\ ]$.

2. Lema de la diagonal ("autoreferencia"): para toda ψ existe φ tal que: PA $\vdash \varphi \leftrightarrow \psi(\overline{\hat{\varphi}})$.

Tomando $\psi = \neg Bew$ se tiene incompletitud: por (2) existe φ tal que: PA $\vdash \varphi \leftrightarrow \neg Bew(\overline{\hat{\varphi}})$, y, para esa fórmula φ se demuestran sucesivamente (usando (1)) PA $\nvdash \varphi$ y PA $\nvdash \neg\varphi$.

EL MILAGRO DEL GENIO: INVERSIÓN DE PENSAMIENTO 1929/1930

SEMINARIO CONTINUO DE FILOSOFÍA DE LAS MATEMÁTICAS
2014-II – GÖDEL

Agosto 20
Intuicionismo y consistencia relativa: grandes conceptos y problemas

---

CLASICISMO *VS.* INTUICIONISMO

BORDE

LÓGICA CLÁSICA (CLAS)	LÓGICA INTUICIONISTA (INT)
rigidez (partes de conjuntos, álgebras booleanas)	plasticidad (espacios topológicos, álgebras de Heyting)
tiempo ideal (puntos)	tiempo real (modelos de Kripke)
∃ (con ventajas: compacidad, Löwenheim-Skolem)	∃! (con desventajas: pérdida de argumentos existenciales)
Teoría Conjuntos (conjuntos estáticos)	Teoría Categorías (conjuntos variables)

LÍMITE
(en la lógica de los haces)

TRANS
transformaciones en la frontera

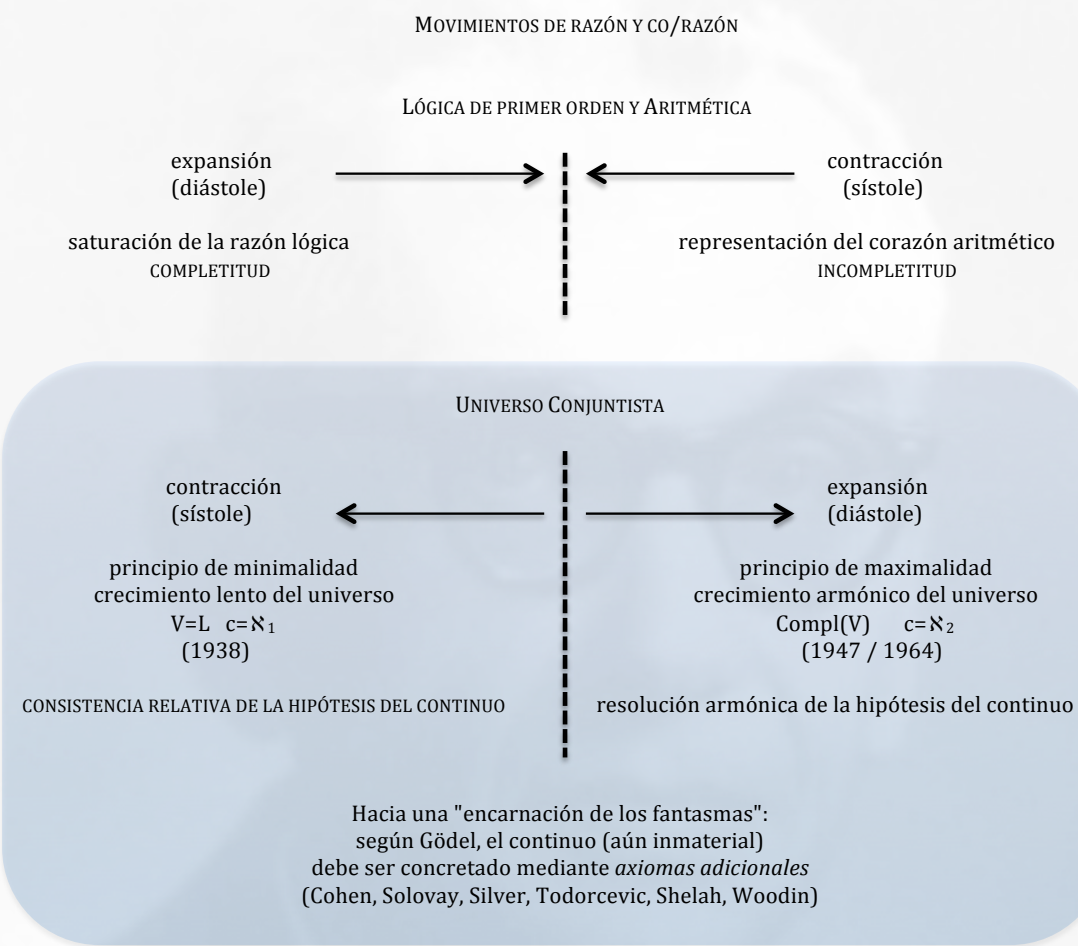
INFINITUD DE LÓGICAS ENTRE INT Y CLAS
(1932)

EQUICONSISTENCIA ENTRE ARITMÉTICA CLÁSICA Y ARITMÉTICA INTUICIONISTA
(1933)
vía TRADUCCIÓN DE GÖDEL DE LO CLÁSICO EN LO INTUICIONISTA
(paralelamente a Kolmogorov, Gentzen, Bernays)

INTERPRETACIÓN DE INT EN LA LÓGICA MODAL (S4)
(1933)

TEORÍA INTUICIONISTA DE FUNCIONALES COMPUTABLES
Y OPERACIONES HEREDITARIAMENTE RECURSIVAS
("Dialectica Interpretation", 1958)

CONSISTENCIA RELATIVA *VS.* RESOLUCIÓN "ARMÓNICA"



Las redes de relaciones entre los conceptos matemáticos
permiten definir los *lugares (topos)* de encarnación de las ideas

Las *tramas de densidad* dentro de esas redes (minimalidad, maximalidad)
ayudan a establecer adecuadas armonías entre
los topos de *posibilidad* (lo fantasmal) y los topos de *actualidad* (lo material)

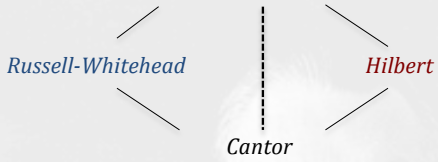
El co/razón (fantasmagórico, ideal) y la razón (concreta, real)
precisan *los límites y las limitantes* de las regiones del saber

Agosto 27
1930: entornos técnico, filosófico y biográfico

(A) El entorno técnico

Influencia

(a) Lectura de *clásicos* en la Universidad: Riemann, Euclides, Euler, Lagrange, Dirichlet (1924-1927)
(b) Asistencia a cursos de *Furtwängler* (teoría de números) y (muy probablemente) de *Hahn* (funcional)
(c) Estudio de Maestros en la Lógica: ***borde*** del desglose analítico y la estructuración sintética



(d) Cercanía natural con el intuicionismo de *Brouwer*.

Herencia

(1) Ningún (!) tesista doctoral

(2) Enorme influencia indirecta:
teoría de la prueba: Herbrand, Kleene, Church, Kreisel – escuela norteamericana
teoría de conjuntos: Bernays, von Neumann, Cohen – escuela norteamericana

En general, hombre esencialmente **aislado y alejado** de sus ambientes materiales**.**

(B) El entorno filosófico

(e) Asistencia a curso anual de historia de la filosofía (en particular, *Kant*) (1925-1926)
(f) Asistencia a Seminarios: *Schlick* (dedicado a Russell) (1925-1926); *Hahn y el Círculo Viena* (dedicado al *Tractatus*) (1926); *Menger* (dedicado a la teoría de la dimensión) (1927); *Carnap* (dedicado a los fundamentos de la aritmética) (1928)
(g) Aportes para un rediseño del lugar de *Platón* en la filosofía de la matemática
(h) Extensas lecturas privadas de *Kant* y *Leibniz*

(i) *Las Manos de Orlac*



(C) El entorno biográfico

1906 (Abril 28)	Nacimiento en Brno (Brünn) – Moravia, República Checa	
1916	Liceo (alemán) en el Staats-Realgymnasium – Brno	
1924	Entra a la Universidad de Viena (estudios de física)	
1926	Cambio a matemáticas – Asiste a sesiones del Círculo de Viena	
1929	Muerte del padre – Contribuciones y ediciones en el Coloquio Menger	
1929	*Tesis Doctoral* (aprobada Julio 6, sometida Octubre 22, publicada Septiembre 19 1930)	
1930	Grado de Doctor (Febrero 6) Presenta resultados de la Tesis en Königsberg (Septiembre 6) y *al día siguiente* (!) anuncia los resultados de incompletitud (mesa redonda, en presencia de von Neumann)	***Über die Vollständigkeit des Logikkalküls*** (completitud lógica clásica primer orden)
1931		***Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme*** (incompletitud aritmética)
1931-1932	Presentaciones en Seminarios Hahn & Menger (8) Reseñas (para *Zentralblatt*, *Monatshefte*) (1931-1936) (33) Intento de co-autoría monográfica con Heyting	
1932-1933	Universidad de Viena: Tesis de Habilitación (artículo incompletitud) – *Privatdozent*	***Zum intuitionistischen Aussagenkalkül*** ***Zur intuitionistischen Arithmetik und Zahlentheorie*** ***Eine Interpretation des intuitionistischen Auss.***
1933-1934	Cursos IAS (Princeton) sobre resultados de incompletitud Al regreso a Austria, pasa una temporada en el Sanatorio	
1935	Demuestra la consistencia del axioma de elección Regreso al IAS, pero dimite (depresión)– Incapacitado hasta 1937	
1937	Demuestra la consistencia de la hipótesis del continuo	
1938	Matrimonio con Adele Nimbursky (Septiembre 20) Retorno al IAS – Conferencias sobre teoría de conjuntos (publ. 1940)	
1939	Declarado apto para el servicio militar en Austria	
1940	Emigración a Estados Unidos (tres meses, vía trans-siberiano, Japón, San Francisco, Princeton) Miembro del IAS (anual hasta 1946, permanente desde 1946)	***The Consistency of the Axiom of Choice and of the Generalized Continuum Hypothesis with the Axioms of Set Theory***
1942	Intentos de prueba de independencia de AC, CH	
1944		***Russell's Mathematical Logic***
1947	Ciudadano norteamericano (1948)	***What is Cantor's Continuum Problem?***
1949-1952	Conferencia ICM 1950 (sobre cosmología)	Publica tres trabajos sobre Relatividad General
1958		***Über eine bisher noch nicht benütze Erweiterung des finiten Standpunktes*** ("Dialectica interpretation")
	Muerte de la madre (1966)	
1970		***Ontological proof*** ***True power of the continuum*** $\aleph_2$
1975	National Medal of Science	
1978 (Ener 14)	Muerte (desnutrición)	

Septiembre 3
La Tesis Doctoral: completitud de la lógica clásica de primer orden

---

Precedentes. [Post 1921] Completitud del cálculo proposicional clásico. [Skolem 1922] Dialéctica satisfacibilidad/refutabilidad en primer orden. [Bernays 1926] Completitud del fragmento proposicional de *Principia Mathematica*. [Hilbert & Ackermann 1928] "Es aún un problema abierto si el sistema axiomático [de la lógica clásica de primer orden] es completo en el sentido de que todas las fórmulas correctas para cada dominio de individuos puedan ser derivadas. Solo se sabe de manera puramente empírica que el sistema axiomático basta para todas las aplicaciones".

[1929] *Über die Vollständigkeit des Logikkalküls* ("*Sobre la plenitud del cálculo lógico*")

Orden de la invención gödeliana.
1928. Conferencias de Brouwer en Viena. Gödel compra un ejemplar de *Principia Mathematica*. Gödel asiste al *Seminario Carnap* (fundamentos de la aritmética).
1929. Gödel presenta la Tesis terminada a Hahn. Julio 6: aprobación de la Tesis (Hahn, Furtwängler). Octubre 22: revisión resumida lista para publicación.
1930. Septiembre 19: publicación ("Die Vollständigkeit der Axiome des Logischen Funktionenkalküls", *Monatshefte für Mathematik und Physik* 37: 349-360). La publicación deja de lado las anotaciones filosóficas de la Introducción en la Tesis. Por otro lado, la publicación introduce el *teorema de compacidad* (Teorema X: "Un sistema enumerable de fórmulas es satisfacible si y sólo si todo subsistema finito es satisfacible") (119), no presente en la Tesis.

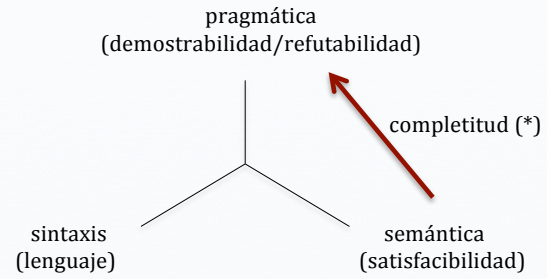
contenido lógico-matemático	*conceptos metodológicos/filosóficos*
§1 ***Introducción.*** Referencias a Russell & Whitehead, Hilbert & Ackermann, Löwenheim, Brouwer, Carnap. "*Compleción teórica* de las pruebas de consistencia" (61). *Posibilidad de la irresolubilidad* de un problema bajo precisos métodos formales de inferencia –(!): *incompletitud* (61, 63)–. Enunciado de completitud (63). Discusión del tenor *intuicionista* del teorema de completitud (63, 65). Enunciados de independencia (axiomas) y de extensiones (igualdad, fórmulas enumerables) (65).	maximalidad co/razón intuicionista borde completitud/incompletitud
§2 ***Observaciones preliminares sobre el sistema lógico axiomático adoptado y la terminología usada.*** "En la notación (...) esencialmente seguimos Hilbert & Ackermann" (65). "El sistema lógico adoptado es (esencialmente) el de Russell" (67). Estudio paralelo de cálculo sin igualdad ("en sentido restringido") y cálculo con igualdad ("en sentido extendido") (67). Signos lógicos como "figuras en el espacio" (67). Definiciones (intuitivas) de satisfacibilidad y validez (69).	precisión sintaxis/pragmática
§3 ***Sumario de los teoremas del cálculo funcional que serán usados.*** Completitud del cálculo proposicional (71). Substitución de equivalencias (71). Existencia de formas normales (71). Intercambio de existenciales (71). Formas prenexas (71, 73). Especificaciones universales (73).	base técnica
§4 ***Reducción del teorema de completitud al teorema correspondiente para fórmulas de grado 1.*** Equivalencia de completitud al hecho: *toda fórmula es satisfacible o refutable* (75). Reducción del teorema al caso de prenexas con k intercambios de cuantificadores universales y existenciales (75). Reducción al caso k=1, mediante las *técnicas de extensión de Skolem* (funcionales y variables nuevas) (77).	dialéctica satisfacibilidad/refutabilidad jerarquía de funcionales
§5 ***Prueba del teorema de completitud en el sentido restringido.*** Preparación: añadido de suficientes variables y niveles ("testigos" sintácticos) (79, 81). n-expresiones derivadas asociadas a una fórmula y prueba deductiva (basada en §3) de sus correlaciones (81, 83). Sistemas de satisfacibilidad de nivel n y enlace entre primer orden y cálculo proposicional (forma del *Teorema de Herbrand*) (85). Caso sencillo: refutación (85). Caso delicado: satisfacibilidad – *extensiones y maximalidad* (87). Corolario: *Teorema de Löwenheim-Skolem enumerable* (89).	riqueza sintáctico-pragmática jerarquía de pruebas principio de maximalidad riqueza de lo enumerable
§6 ***Prueba del teorema de completitud en sentido extendido.*** Modelo a lo sumo enumerable (89). Inversión (vía negación): demostrabilidad o satisfacibilidad de la negación (89). Substituciones de igualdad por símbolo binario (91). Caso sencillo: demostrabilidad (91). Caso semi-sencillo: satisfacibilidad de la negación en un espacio cociente de los naturales (91).	distinción ligada a equivalencia
§7 ***Prueba de independencia para el sistema lógico axiomático.*** Proceso de interpretaciones aritméticas, siguiendo (explícitamente) a Bernays (93) e (implícitamente) a Hilbert (95).	
§8 ***Extensión del teorema de completitud a sistemas infinitos de expresiones lógicas; aplicaciones axiomáticas.*** Todo sistema enumerable de fórmulas es satisfacible (existe un modelo que satisface todas las fórmulas) o refutable (existe un subsistema finito refutable) (97). Prueba "completamente análoga": uso de representaciones "matriciales" (99) para construcción de expresiones derivadas. Todo sistema axiomático (finito o infinito) de primer orden posee un modelo o es inconsistente (101).	iteración de maximalidad hacia conjuntos de fórmulas

Las referencias de páginas remiten a la edición de los *Collected Works*, vol. I, Oxford: Oxford University Press, 1986.

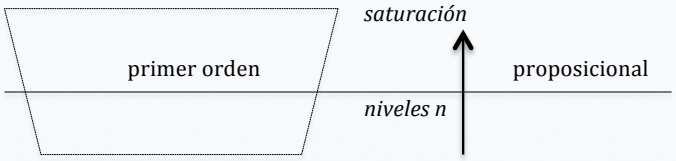
PRINCIPIO DE MAXIMALIDAD

[a nivel lógica clásica de primer orden]

las iteraciones sintáctico-pragmáticas cubren la semántica



(*) La *base* técnica sintáctico-pragmática (§3) de la lógica clásica de primer orden es muy potente y permite establecer una sofisticada *arquitectónica* deductiva (§5)



No obstante, desde el inicio (1928-1929),
presente en la *Introducción* de su *Tesis*,
Gödel es plenamente consciente del
BORDE
entre completitud e incompletitud

La riqueza sintáctico-pragmática (*funcionales, testigos, extensiones*) de la lógica clásica de primer orden asegura que su *iteración maximal* producirá COMPLETITUD

La riqueza semántica real (*modelos múltiples*) de los números reales y de la aritmética asegura que su *irresolubilidad* producirá INCOMPLETITUD

expansión

contracción

Septiembre 10
La incompletitud de la aritmética (I): estructura

Precedentes inversos (hacia completitud). [Post 1921] Completitud del cálculo proposicional clásico. [Gödel 1929] Completitud de la lógica clásica de primer orden. [Presburger 1930] Completitud de la aritmética restringida a la suma. [Herbrand 1930] Completitud de la aritmética restringida a cuantificadores acotados.

Precedentes directos (hacia incompletitud). Desde la *Introducción* misma a su *Tesis Doctoral* (1928-1929), Gödel anuncia la posibilidad natural de situaciones de incompletitud. Paralelamente a Gödel, von Neumann (carta a Gödel de Noviembre 20 1930) estaba acercándose a formas de incompletitud.

Orden de la invención/presentación. **1929**. Intuición de incompletitud. **1930**. Trabajo inicial. Agosto 26-29: anuncios a Carnap, en cafés en Viena. Septiembre 7: anuncio oral a la comunidad, en mesa redonda en Königsberg ("Diskussion zur Grundlegung der Mathematik") (201-203). Octubre 23: reporte escrito, comunicado por Hahn a la Academia de Ciencias de Viena ("Einige metamathematische Resultate über Entscheidungsdefinitheit [definición de decisión = decidibilidad] und Widerspruchsfreiheit [libertad de contrariedad en el discurso = consistencia]") (141-143). **1931**. Artículo central (145-195). **1932**. Breve nota resumen ("Über Vollständigkeit [plenitud = completitud] und Widerspruchsfreiheit", *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums* 2 (1932): 27-28; torre de sistemas incompletos, consistentes desde sus extensiones) (235-237).

[1931] ***Über formal unentscheidbare Sätze der* Principia mathematica *und verwandter Systeme I***

("*Sobre proposiciones formalmente indecidibles de* Principia mathematica *y sistemas relacionados I*")

(publicación en *Monatshefte für Mathematik und Physik* 38 (1931): 173-198).

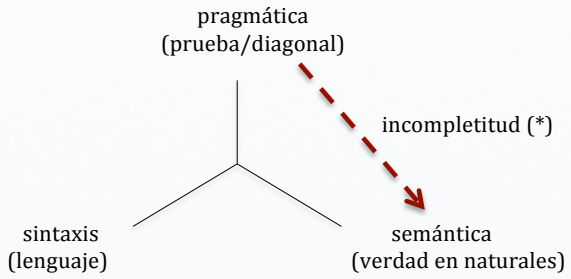
contenido lógico-matemático (1ª parte: estructura)	*conceptos metodológicos/filosóficos*
Sección 1 (145-151)**.** Enunciado de incompletitud ("existen problemas relativamente simples en la teoría de los naturales que no pueden ser decididos en base a los axiomas") para una "amplia clase de sistemas formales" (*Principia Mathematica*, ZF, sistemas de Hilbert y sus colaboradores) (145). Gödelización: fórmulas y pruebas codificables mediante sucesiones finitas de naturales (147). Consecuencia: metamatemática expresable *dentro* del sistema (147). *Predicado diagonal, autorreferencia y exhibición de proposición indecidible* (149). Analogía con la paradoja de Richard (compare con Caicedo) (149). Analogía con el "mentiroso" ("frase que dice de sí misma que es indemostrable") (150). Observación: incompletitud vale para sistemas con (1) suficiente poder de representación, (2) adecuada validez (151). El reemplazo de (2) por hipótesis "puramente formales y más débiles" dirige el camino central del artículo (151) [camino, de hecho, "inobjetable desde un punto de vista intuicionista" (177)].	matemática/metamatemática representabilidad diagonalización fondo intuicionista (cambio de validez por definibilidad)
Sección 2 (151-181). Gödelización, recursividad, representatividad, primer teorema de incompletitud. **Sección 3** (181-191)**.** Recursividad *versus* aritmetizabilidad, fórmulas aritméticas indecidibles. (Ver más adelante, nuestra sesión siguiente en el Seminario).	
Sección 4 (191-195)**.** Segundo teorema de incompletitud: *consistencia indemostrable* en un sistema consistente que contenga a la aritmética (prueba vía representaciones recursivas de las fórmulas) (193). Observación: la prueba es constructiva (intuicionista) (195). Los resultados "no contradicen el punto de vista formalista de Hilbert" (!), pues existe la posibilidad de encontrar métodos finitistas no expresables en la aritmética (fantasmagoría tipo *Las Manos de Orlac*) (195). [Nota añadida en 1963: gracias al trabajo de Turing, puede darse una noción general de sistema formal para el que se aplican apropiadamente los teoremas de incompletitud] (195).	"exponenciación" de la consistencia sobre un fondo intuicionista finitud "fantasmagórica"

Las referencias de páginas remiten a la edición de los *Collected Works*, vol. I, Oxford: Oxford University Press, 1986.

PRINCIPIO DIAGONAL (autorreferencia, contracción)

[a nivel de sistemas que permitan la representabilidad de funciones recursivas]

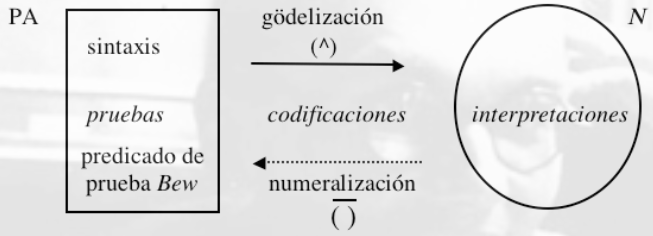
las iteraciones sintáctico-pragmáticas (enumerabilidad) ***no*** *cubren la semántica (transfinitud)*



(*) La *base* técnica sintáctico-pragmática de la aritmética clásica de primer orden (PA) permite definir la demostrabilidad (*Bew*), pero no la representabilidad de la verdad (*N*), por lo que pueden existir verdades no demostrables (paradojas del mentiroso y de Richard)

traducibilidad de la sintaxis/pragmática en la aritmética
construcción autorreferente de la sentencia "soy indemostrable"
representabilidad aritmética de las funciones/relaciones recursivas
construcción formal de sentencias indecidibles (indemostrabilidad, consistencia)

lectura actual



1. Predicado de prueba: se construye *Bew* tal que: PA $\vdash \varphi \Leftrightarrow N \models Bew(x)$ $[\ \overline{\hat{\varphi}}\ ]$.

2. Lema de la diagonal ("autoreferencia"): para toda ψ existe φ tal que: PA $\vdash \varphi \leftrightarrow \psi(\overline{\hat{\varphi}})$.

Tomando $\psi = \neg Bew$ se tiene incompletitud: por (2) existe φ tal que: PA $\vdash \varphi \leftrightarrow \neg Bew\ (\overline{\hat{\varphi}})$, y, para esa fórmula φ se demuestran sucesivamente (usando (1)) PA $\nvdash \varphi$ y PA $\nvdash \neg\varphi$.

Septiembre 17
La incompletitud de la aritmética (II): recursividad y representación

---

[1931] *Über formal unentscheidbare Sätze der* Principia mathematica *und verwandter Systeme I*

("*Sobre proposiciones formalmente indecidibles de* Principia mathematica *y sistemas relacionados I*")

(publicación en *Monatshefte für Mathematik und Physik* 38 (1931): 173-198).

contenido lógico-matemático (2ª parte: recursividad y representabilidad)	*conceptos metodológicos/filosóficos*
Sección 2 (151-181). Desarrollo "con plena precisión" de la prueba esbozada en la Sección 1 (151). Sistema *P*: "lógica de *Principia Mathematica* superpuesta sobre los axiomas de Peano" (151). Definiciones: numerales, fórmulas elementales, fórmulas (referencia a procesos de clausura en Tarski), sentencias, signos de relación, signos de clase, substitución, elevación (153). Axiomas: sucesor, inducción, proposicionales, cuantificacionales, reducibilidad (= comprensión), extensionalidad (155). Clase de fórmulas demostrables (referencia a procesos de clausura en von Neumann) (155-157). *Gödelización*: dos etapas: "asignamos números naturales a los signos primitivos del sistema *P*" y "enviamos sucesiones finitas de naturales en naturales" (157). Relaciones naturales asociadas a relaciones sintácticas (157). Enunciado de incompletitud trasladado a enunciado de existencia sobre naturales (157). Funciones entre naturales: funciones "recursivamente definidas" (a la estela de Dedekind, Skolem, Hilbert, Ackermann) (157-159). Clase de funciones recursivas (= *primitivas recursivas, p.r.*) (159). Relaciones p.r. (159). Teoremas de clausura para funciones p.r. (159) y pruebas de los teoremas (caso paradigmático del Teorema IV: red, escala y acotación) (161-163). Construcción de 45 funciones (relaciones) p.r., incluyendo "ser fórmula" (def. 23), "ser axioma" (def. 42), "ser prueba de" (def. 45) (163-171). Sugerencia de extensión (recursividad general, idea posterior debida a Herbrand), vía p.r. sin acotaciones (nota 34) (163). Función 46: *Bew* (demostrabilidad), no se puede asegurar p.r. (171). Teorema V: *definibilidad formal (= representabilidad numeral*, en términos de Kleene) de *las relaciones p.r.* (171-173). Definición: *ω-consistencia* (173). Teorema VI: *primer teorema de incompletitud* (expresión formal en términos puramente metamatemáticos) (173) y prueba subsiguiente: predicados de prueba $B\kappa(x,y)$, $Bew\kappa(x)$, *relativos* a clase κ ω-consistente recursiva, representaciones formales del argumento diagonal, fórmula *explícita* indecidible (173-177). Énfasis fundamental: la prueba es constructiva, "inobjetable desde un punto de vista intuicionista" (177). Borde fundamental: una clase ω-consistente y decidible posee sentencias indecidibles (177). Relaciones entre consistencia y ω-consistencia (179). *Propiedades estructurales* usadas en la prueba de incompletitud (recursividad de las pruebas, representabilidad p.r.) (181). Extensión de incompletitud (dada para *P*) a sistemas de teoría de conjuntos (Zermelo-Fraenkel, von Neumann) y a la aritmética de Peano (181). *Transfinitud* (semántica) no recubrible por enumerabilidad deductiva (pragmática) (nota 48a) (181).	traducibilidad sintaxis/pragmática → semántica riqueza semántica de los naturales umbral de representación: recursividad (p.r.) representabilidad semántica → sintaxis/pragmática lo decidible en umbral alto genera lo indecidible arquetipos estructurales generales de lo indecidible
Sección 3 (181-191)**.** Relaciones aritméticas (definibles en la estructura estándar de los naturales) (181). Teorema VII: toda relación recursiva es aritmética (183); prueba por inducción, casos (substitución, recursión primitiva) y codificaciones vía teorema chino del residuo (183-185). Existencia de proposiciones indecidibles aritméticas (185). Procedimiento general para la decisión de de satisfacibilidad de fórmulas de la forma $\forall x P x$, con *P* recursiva (187-191).	encarnación aritmética de los arquetipos de indecidibilidad

Las referencias de páginas remiten a la edición de los *Collected Works*, vol. I, Oxford: Oxford University Press, 1986.

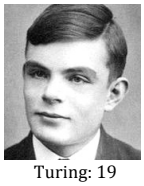
(1931) → : el "milagro" emergente (juventud) de la *teoría* de la computabilidad matemática


Gödel: 25


von Neumann: 28


Herbrand: 23

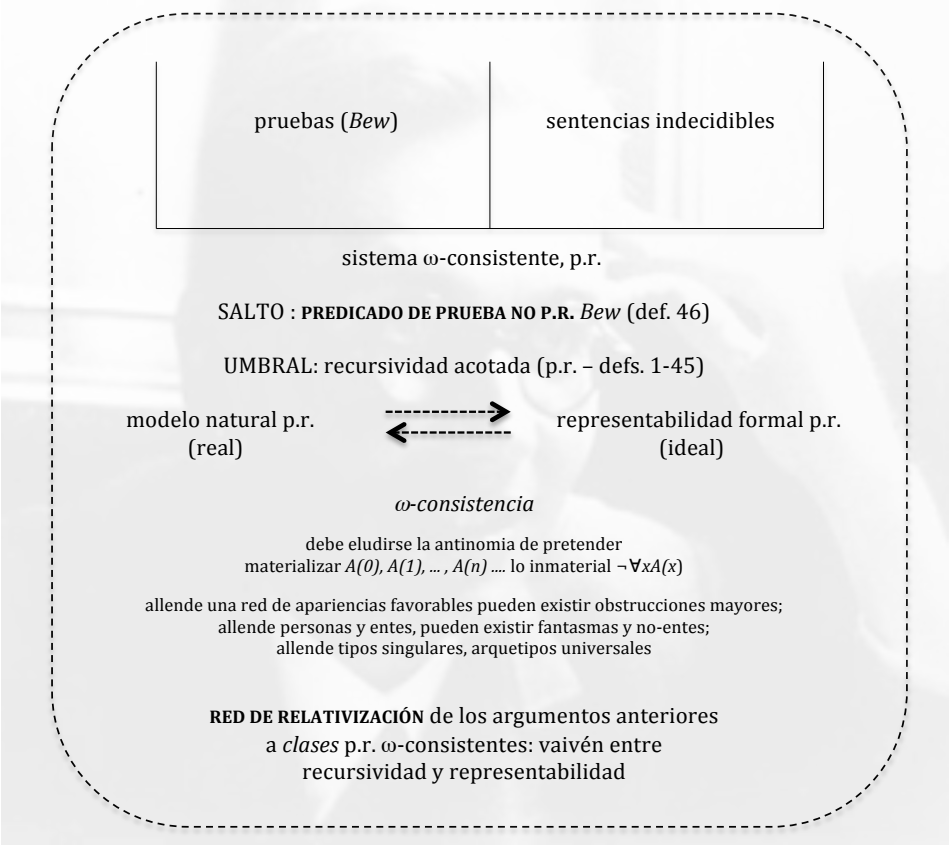

Kleene: 22


Turing: 19


Church: 28


Post: 34

LOS BORDES DE LA INDECIDIBILIDAD Y LA INCONSISTENCIA



LA METÁFORA DE KRIPKE (1980)

Lewis Carroll: *Alice in Wonderland*

Kripke: (0) "Alice is Wonderful" + (1) Alice = "Alice is Wonderful"

iteración infinita autorreferente
La belleza de Alicia es la belleza de la oración que habla de la belleza de Alicia...

EMERGENCIA DE JERARQUÍAS, NIVELES, GRADOS DESDE (1) HASTA (∞)
recursividad (primitiva, general), aritmetizabilidad
(ir)resolubilidad / obstrucciones y tránsitos
grados de Post

Octubre 1

La lógica intuicionista y la aritmética intuicionista (escritos de Viena)

[1932] ***Zum intuitionistischen Aussagenkalkül***
("Sobre el cálculo proposicional intuicionista", *Anzeiger der Akademie der Wissenschaften in Wien* 69 (1932): 65-66).

[1933e] ***Zur intuitionistischen Arithmetik und Zahlentheorie***
(Conferencia: 28 Junio 1932 en el Coloquio Menger; publicación "Sobre la aritmética y la teoría de números intuicionista", *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums* 4 (1933): 34-38).

[1933f] ***Eine interpretation des intuitionistischen Aussagenkalküls***
("Una interpretación del cálculo proposicional intuicionista", *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums* 4 (1933): 39-40).

contenido lógico-matemático	*conceptos metodológicos/filosóficos*
[1932] Imposibilidad de *contracción*: el cálculo proposicional intuicionista *no* puede caracterizarse como un sistema multivaluado finitario (225). Posibilidad de *expansión*: existe una *infinitud* de cálculos proposicionales entre el cálculo intuicionista (H) y el clásico (A) (225). Prueba utilizando álgebras de Heyting *lineales* con *n* elementos (225) (axiomatizadas por Thomas en 1962, sobre resultados de Dummett 1959). Enunciado de la *propiedad disyuntiva* del cálculo intuicionista (225) (prueba por Gentzen en 1935).	umbral (1): riqueza infinitaria de las lógicas superintuicionistas
[1933e] *Equiconsistencia* (usando Glivenko) de cálculos clásico (A) e intuicionista (H) para fórmulas en el ∧-¬ fragmento proposicional (287). *Extensión* (si A deduce F entonces H deduce F') a todas las proposiciones mediante la *traducción negativa* ( )', con cláusulas centrales (F∨G)' = ¬(¬F'∧¬G'), (F→G)' = ¬(F'∧¬G') (287). Objetivo: "demostrar que algo similar vale para toda la aritmética y la teoría de números" (287). Descripción del *sistema de Herbrand* (Z) para la aritmética clásica (289). Descripción del *sistema de Heyting* (H_2) para la aritmética intuicionista y extensión a un *mixto* Herbrand-Heyting (H') (289-291). "Traducción" ( )' de Z-fórmulas en H'-fórmulas (291). Teorema a probar: si Z deduce F entonces H' deduce F'. Lema 1: buen comportamiento (punto fijo deductivo) de la *doble negación* ¬¬ en la imagen de la traducción (prueba gracias a leyes intuicionistas) (291-293). Lema 2: buen comportamiento deductivo de la traducción (prueba gracias a ley intuicionista) (293). Base de la prueba: la traducción envía axiomas de Z en axiomas de H' (295). Lectura final: *equiconsistencia* ("no finitaria en el sentido de Herbrand") entre la aritmética clásica y la aritmética intuicionista – *lucha contra las apariencias gracias a una interpretación alternativa* (295). Las restricciones intuicionistas adquieren su importancia en análisis y teoría de conjuntos debido a la eliminación de definiciones impredicativas (niveles de orden superior), y *no* al rechazo del tercio excluso (nivel proposicional) (295).	umbral (2): equiconsistencia CLAS / INT a niveles - proposicional -aritmético umbral (3): *traducibilidad* *doble negación* ¬¬ umbral (4): divergencia profunda INT a nivel analítico (cont.)
[1933f] Interpretación del cálculo proposicional intuicionista en el cálculo proposicional clásico + predicado *Bp*: "*p* es demostrable" (301). *Axiomas* sobre *B* (sistema S de Gödel, correspondiente al sistema modal de Lewis S4) y regla de necesitación (301). *Traducciones* ( )' (de intuicionismo a clasicismo + demostrabilidad), primaria y alternativa (301). Afirmación: si H deduce F entonces S deduce F' (301). Conjetura: el converso vale (301) (prueba por McKinsey & Tarski 1948). Equivalencia de S y S4 (301). Sistema S ligado a demostrabilidad *genérica global*, *no* a demostrabilidad en un sistema local dado: la fórmula B(Bp→p) no es demostrable, por incompletitud, en un sistema que contenga la aritmética (301-303).	umbral (5): *traducibilidad* intuicionismo / modalidad (topología en el transfondo)

Las referencias de páginas remiten a la edición de los *Collected Works*, vol. I, Oxford: Oxford University Press, 1986.

PÉNDULO GÖDELIANO

satisfacibilidad	----------	refutabilidad
numeralización	----------	representación
enumerabilidad	----------	transfinitud
clasicismo	----------	**intuicionismo**
análisis	----------	fenomenología
vivos	----------	muertos

back-and-forth dialéctico entre fuerzas de expansión y contracción

HOROS GÖDELIANOS

DE LA DOBLE NEGACIÓN

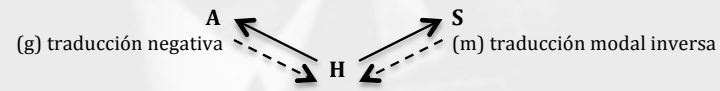
$\neg\,\neg$

"traducción negativa" (de clasicismo A en intuicionismo H)
(variantes en Kolmogorov 1925, Gentzen 1933, Kuroda 1951, Kleene 1952)

DE LA DEMOSTRABILIDAD

$\Box$

"traducción modal" (de intuicionismo H en modalidad/demostrabilidad S)
(variantes en Kolmogorov 1932, McKinsey & Tarski 1948, Grzegorczyk 1967)



$\mathbf{A} \vdash F \Rightarrow \mathbf{H} \vdash g(F)$ (Gödel)
$\mathbf{S} \vdash F \Rightarrow \mathbf{H} \vdash m(F)$ (Gödel, McKinsey-Tarski)

OPERADOR DE FRONTERA

$\neg\,\neg$

(non de non, "rien de rien", Edith Piaf, 1956)

- positivo/negativo, uno/múltiple (Galois)
- holomorfo/singular (Riemann)
- recto/revés, contracción/expansión (Carroll)
- doble corte en gráficos Alfa o Gama (Peirce)
- dualidad ordinal/cardinal (Cantor)
- vaivén homología/homotopía (Poincaré)
- proyectividad ideal/real (Hilbert)
- denso-sí en el futuro (Kripke)
- *back-and-forth* en modelos abstractos (Lindström)
- **topología en un topos elemental** (Lawvere)
- suavización genérica en haces (Caicedo)

Octubre 15

El universo constructible: consistencia relativa del axioma de elección y de la hipótesis generalizada del continuo

---

[1940] *The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum hypothesis with the axioms of set theory*

(*La consistencia del axioma de elección y de la hipótesis generalizada del continuo con los axiomas de la teoría de conjuntos*, Princeton: Princeton University Press, 1940).

Orden de la invención.

Formación (Viena).

1928-1931 registro de fichas de bibliotecas universitarias – pedidos de trabajos de Skolem, Fraenkel, von Neumann, Hilbert en teoría de conjuntos [dadas las investigaciones de Gödel en incompletitud, recursividad e intuicionismo, debe también haberle resultado natural pensar *simultáneamente* en temas de consistencia relativa y de constructibilidad].

Producción (Viena).

1935 consistencia relativa del axioma de elección.
1937 (noche del 14-15 junio, registro en su *Arbeitshefte* #16) – consistencia relativa de la hipótesis generalizada del continuo.
(15 diciembre, carta a Menger) – intentos de prueba de independencia.

Difusión (Viena, Göttingen, USA).

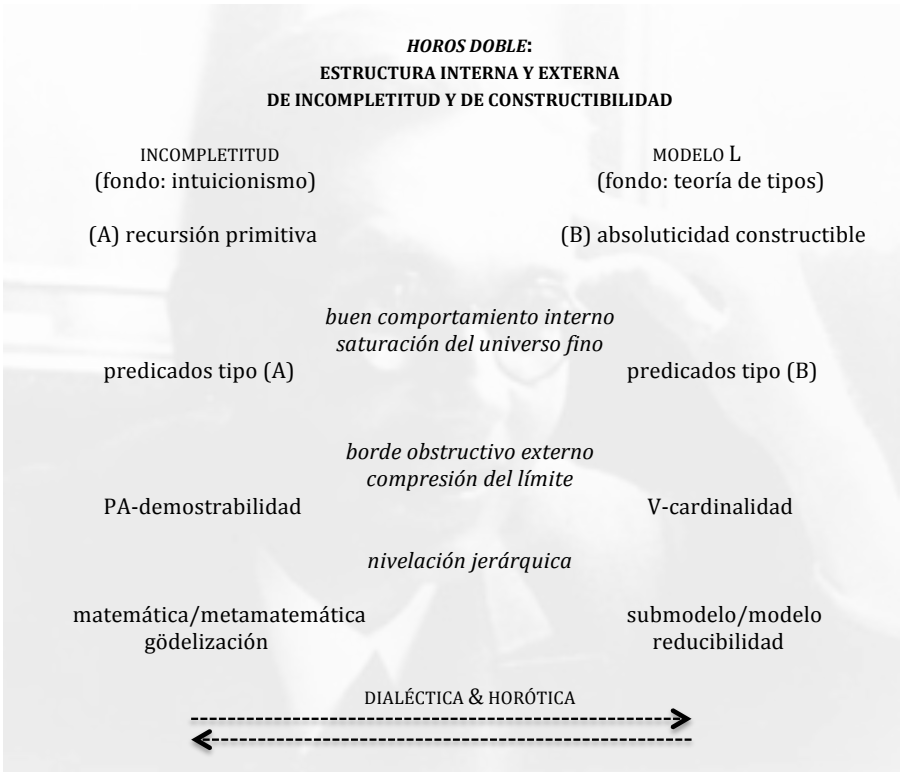
1937 (mayo-junio) – curso *Axiomatik der Mengenlehre* en la Universidad de Viena (Mostowski, estudiante).
[1938a] (29 enero) – conferencia en la Universidad de Viena (Zilsel, organizador).
1938 (noviembre-diciembre) – curso en el IAS, Princeton (Church, Curry, asistentes).
1939 (enero-mayo) – curso en la Universidad de Notre Dame (Menger, organizador).
[1939b] (15 diciembre) – conferencia en la Universidad de Göttingen.

[1938] "The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum hypothesis", *Proc. Nat. Acad. Sciences* 24 (1938): 556-557.
[1939] "The consistency of the generalized continuum hypothesis", *Bulletin of the American Mathematical Society* 45 (1939): 93.
[1939a] "Consistency proof for the generalized continuum hypothesis", *Proc. Nat. Acad. Sciences* 25 (1939): 220-224.

contenido lógico-matemático	*metodología/filosofía*
Conferencias. **[1938a]** (texto sobre *teoría de la prueba*: sistemas finitarios de prueba, extensiones en funcionales altos, lógica modal y poder ordinal) "Toda prueba de consistencia es a su vez matemática y puede por tanto ser llevada a cabo en sistemas matemáticos definidos" (87). "Las respuestas son en parte positivas, en parte negativas (...) y sus dificultades se deben a la vaguedad del *concepto «constructivo»*"(89). "Conjetura: la consistencia del análisis no puede ser demostrada en ningún sistema" [razonablemente constructivo]. **[1939b]** Anuncio de prueba de consistencia relativa de GCH (127) para "una sucesión inabarcable de sistemas cada vez más comprensivos" (129). Reenvío a Hilbert, "Sobre el infinito", como *programa* de consistencia para GCH: papel de las funciones recursivamente definidas (129). Analogía fundamental: funcionales recursivos (Hilbert) ≡ conjuntos constructibles (Gödel) (131). Lema 1: acotación de subconjuntos constructibles. Lema 2: clausura del modelo (131). Las pruebas (similares a pruebas de consistencia no euclideana) *no* son finitarias (131, 137). Lema 3: absoluticidad de la hipótesis "todo conjunto es constructible" (133). *Esquema* de la prueba general a partir de lemas 1-3 (133). "La concepción [de los conjuntos constructibles] yace sobre la así llamada teoría ramificada de tipos, que, a su vez, remite a las objeciones de Poincaré contra las definiciones impredicativas" (133). Método russelliano de construcción, extendido sobre todos los ordinales (135). "Conjunto constructible": "objeto más general obtenible" siguiendo el método russelliano de construcción (135). La "*mayor generalidad* da lugar a la vez, como a menudo sucede, a la *mayor simplicidad*" (137). "La definición de los conjuntos constructibles es análoga en cierto sentido a la jerarquía de los tipos russellianos" (137). *Estabilidad cardinal de los niveles (infinitos) de la jerarquía constructible* (M) (*versus* teorema de crecimiento de Cantor) (141). Teorema fundamental: control de crecimiento ($<\omega_1$) de los conjuntos constructibles en $M\omega$ (143) – "constituye el núcleo corregido del así llamado *axioma russelliano de reducibilidad*" (143). *Esquema de razones* para lemas 1-3: (1) teorema fundamental, (2) reducibilidad, (3) absoluticidad ordinal (145). [[El resto de la conferencia presenta detalles técnicos de las construcciones (147-155)]].	constructividad como *fuente conceptual* del péndulo positivo/negativo en consistencia relativa "Sobre el infinito" (Hilbert) como *fuente analógica* de la constructibilidad teoría ramificada de tipos como *fuente arquitectónica* del modelo de conjuntos constructibles axioma de reducibilidad como *fuente técnica* del control de cardinales en el modelo
Anuncios. **[1938]** Consistencia relativa (con respecto al sistema conjuntista de von Neumann) de AC, GCH, existencia de conjuntos no medibles, y de complementos de analíticos (26). Teorema correspondiente para *Principia Mathematica* y ZF (26). Prueba constructiva (26). Modelo interno de conjuntos constructibles, basado en la teoría ramificada de tipos y en el axioma de reducibilidad (26). "Compleción natural" de los axiomas de la teoría de conjuntos (27). **[1939]** Definición de la jerarquía M de conjuntos constructibles (27). Generalización del "método de Skolem" (27). **[1939a]** Esquema técnico de la demostración (28-32).	
Monografía. **[1940]** *Introducción* (33-35). Anuncio de consistencia de AC y GCH con respecto a sistema de Bernays - von Neumann. Prueba vía construcción de modelos internos. Metamatemática codificable dentro de la matemática. Sistema de von Neumann y distinción clases/conjuntos vía ∈.	dialéctica clases / conjuntos

Capítulo 1 ("Los axiomas de la teoría abstracta de conjuntos", 35-39). Grupo A (4 axiomas). Conjuntos vs. clases propias, extensionalidad, pares. Desarrollos: vacío, conjuntos disyuntos, funcionalidad. Grupo B (8 axiomas). ∈-relación, intersecciones, complementos, dominios, productos, inversiones. Grupo C (4 axiomas). Infinitud, uniones, partes, reemplazo. Axioma D (1 axioma). Fundamentación (von Neumann). Axioma E (1 axioma). Elección (global, fuerza buen orden del universo). Referencias varias a Zermelo, Bernays, von Neumann. *Capítulo 2* ("Existencia de clases y conjuntos", 39-53). Primer ("primitivo", ppf) y segundo ("no primitivo") orden. Construcción inductiva de fórmulas de primer orden (ppf). "Teorema de existencia general": equivalencia de ppf y clases (principio de abstracción de Frege, *demostrado* básicamente a partir de axiomas B). Extensión del teorema a un lenguaje mixto de clases y conjuntos. Existencia de productos, relaciones, funciones, imágenes, potencias, uniones. *Capítulo 3* ("Números ordinales", 54-62). Definición de ordinales a la von Neumann (transitividad, totalidad de pertenencia). Clase propia *On*, paradoja de Burali-Forti. Subclases de ordinales. Ordinales sucesores, límites. Inducción y recursión transfinitas. *Capítulo 4* ("Números cardinales", 63-68). Cardinal como ordinal inicial (a la von Neumann). Propiedades estructurales de cardinales. Teorema de Cantor. Definición de ω. Principio de inducción. Finitud (vía elementos de ω). Aritmética cardinal infinitaria. *Capítulo 5* ("El modelo Δ", 68-78). Modelo Δ de clases y conjuntos constructibles. Modelo *L* de *conjuntos constructibles* (emergencia a partir de axioma de pares y axiomas B, que generan las operaciones fundamentales de conformación de *L*). Estructura descendiente de la constructibilidad. *Absoluticidad* ("puntos fijos" de restricciones a *L*). Absoluticidad implica constructibilidad. Absoluticidad: *tránsitos* (pertenencia, contenencia, vacío, pares, funcionalidad) y *obstrucciones* (partes, universo *V*). *Capítulo 6* ("Prueba de los axiomas de los grupos A-D para el modelo Δ", 79-81). Relativización de los axiomas (a *L*) y pruebas de las relativizaciones. *Capítulo 7* ("Prueba de que *V=L* vale en el modelo Δ", 81-87). Condición (2): Δ satisface *V=L*. Prueba vía absoluticidad de operaciones involucradas en *L*. *Capítulo 8* ("Prueba de que *V=L* implica el axioma de elección y la hipótesis generalizada del continuo", 87-97). Condición (1): *V=L* implica AC (fácil, gracias al buen orden global), *V=L* implica GCH (muy difícil, gracias a formas sofisticadas de reducibilidad). *Apéndice + Índice* (símbolos, términos) (98-101). Notas al pie finales (añadidas en 1951 y 1965): referencias a cardinales Mahlo, al forcing de Cohen, a técnicas cercanas al Teorema de Stone en modelos booleano-valuados.	red constructiva de axiomas axiomatizabilidad finita abstracción plena rehabilitada gracias a clases esquemas de control para ordinales y cardinales (siguiendo a von Neumann) modelo constructible a partir del *núcleo de axiomas B* (mixto gödeliano cercano a *ramificación y reducibilidad*) formas de *variación e invarianza*: *relativización y absoluticidad* formas de *reflexión*: estabilidad final asociada al núcleo constructible

Las referencias de páginas remiten a la edición de los *Collected Works*,
vol. III (para las conferencias publicadas póstumamente [1938a], [1939b])
y vol. II (para las publicaciones en vida [1938], [1939], [1939a], [1940]), Oxford: Oxford University Press, 1990 / 1995.



SEMINARIO CONTINUO DE FILOSOFÍA DE LAS MATEMÁTICAS
2014-II – GÖDEL

Octubre 22
El problema del continuo

[1940a] (15 noviembre) – "Lecture [on the] consistency [of the] continuum hypothesis" – conferencia en Universidad de Brown.
[1946] (17 diciembre) – "Remarks before the Princeton bicentennial conference on problems in mathematics" – conferencia en Universidad de Princeton - publicación en M. Davis (ed.), *The undecidable*, Hewlett: Raven Press, 1965, pp. 84-88.

[1947/64] "What is Cantor's continuum problem?", *American mathematical monthly* 54 (1947): 515-525.
Reimpresión con cambios y adiciones, en P. Benacerraf, H. Putnam (eds.), *Philosophy of mathematics: selected readings*, Oxford: Blackwell, 1964, pp. 258-273.

[1970a/c] Correspondencia inédita (publ. 1995) con Tarski: [1970a] "Some considerations leading to the probable conclusion that the true power of the continuum is $\aleph_2$". [1970b] "A proof of Cantor's continuum hypothesis from a highly plausible axiom about orders of growth". [1970c] Carta no enviada a Tarski.

contenido lógico-matemático	*metodología/filosofía*
[1940a] "Muchas posibilidades" para demostrar la consistencia de CH, consideración de "puntos de vista heurísticos" y comparación con Hilbert, *Sobre el infinito* (175). Definibilidad ordinal (OD) (176). Usando (OD) no se obtendría una decisión de hecho sobre CH, sino solo prueba de su consistencia (176). Conjuntos constructibles (vs. "definibles") y "propiedad de invarianza" de la noción de constructibilidad (*vs*. enumerabilidad, paradoja de Skolem) (177). Primera forma de construcción: siguiendo jerarquía ramificada de tipos (177-178). Segunda forma de construcción: siguiendo definiciones recursivas en ordinales (HOD) (178-184). El axioma de constructibilidad debería ser una "proposición indecidible" (185).	*fantasmagoría* (1): clausura, compleción de lo ordinalmente definible
[1946] La "recursividad general (o computabilidad de Turing)" provee por vez primera una "definición absoluta de una noción epistemológicamente interesante" (150). "Por una suerte de *milagro*, no es necesario distinguir órdenes, y el procedimiento diagonal no lleva fuera de la noción definida" (150, nuestro énfasis). Allende limitaciones de *demostrabilidad* en sistemas formales dados, puede buscarse una noción *completa* de demostrabilidad en teorías de conjuntos con grandes cardinales (151). Allende limitaciones de *definibilidad* en niveles transfinitos, puede buscarse una noción *completa* de definibilidad en modelos con parámetros ordinales (HOD) (151). *Constructibilidad* como forma "degenerada" de definibilidad: *no* debe considerarse satisfactoria (!) (152). "Posee cierta plausibilidad el que todas las cosas concebibles por nosotros sean enumerables" (152). La psicología de los seres que estudian la matemática no determina la enumerabilidad o no enumerabilidad del modelo (152). Importancia de la no aleatoriedad (no referencias a buenos órdenes) en la definición de ordinales según von Neumann (152). HOD debe llevar a una "prueba más sencilla de la consistencia de AC", pero no debería asegurar la validez de CH (153).	*fantasmagoría* (2): clausura, compleción - de lo demostrable - de lo definible - de lo constructible
[1947] *§1* ("El concepto de número cardinal"). Definiciones cantorianas: invarianza, no arbitrariedad, sistematicidad (176-177). *§2* ("El problema del continuo, la hipótesis del continuo y los resultados parciales concernientes a su verdad obtenidos hasta ahora"). Hipótesis del continuo (177). Limitaciones para el cardinal del continuo **c** (König, validez para subconjuntos analíticos) (178). Desconocimiento cualitativo y cuantitativo de **c** (178). "Pronunciado fracaso" de la aritmética cardinal "más simple y no trivial" (178). Referencias extensas a la escuela polaca (178). *§3* ("Replanteamiento del problema sobre la base de un análisis de los fundamentos de la teoría de conjuntos y resultados obtenidos a lo largo de esas líneas"). La "escasez de resultados" parece deberse a "hondas razones" que requieren un "análisis más profundo que aquel que las matemáticas acostumbran a dar" (179). El intuicionismo brouweriano destruye el problema – y se tiene una "actitud negativa (...) de ninguna manera necesaria" (179). Una ingenua teoría de conjuntos, "completamente auto-consistente", provee una alternativa (180). "Hay a priori tres posibilidades para la conjetura de Cantor: puede ser demostrable, refutable o indecidible. La tercera alternativa (...) es la más probable" (181). La *indecidibilidad no resuelve* el problema del continuo: se requieren *extensiones* del concepto de conjunto y *nuevos axiomas* que provean "una descripción completa de la realidad" (181). Axiomas de grandes cardinales, axiomas Mahlo, etc., deben *completar sin arbitrariedad* el sistema axiomático – "muy poco se sabe de esa sección de la teoría de conjuntos" –, aunque "hay poca esperanza de resolver CH mediante ellos" (182). Método "pragmático" de resolución: inspección de consecuencias demostrables (182). *§4* ("Algunas observaciones sobre la pregunta: ¿en qué sentido y en qué dirección puede esperarse una solución del problema del continuo?"). "Irresolubilidad" pragmática de CH: (1ª razón) los modelos alternativos (HDO, V) no deciden (183), pero sí se decide en L (184); (2ª razón) consecuencias paradójicas en análisis a partir de CH (escuelas rusa y polaca) (184-185). Inexistencia de una "proposición plausible" que implique CH (186). "El papel del problema del continuo en teoría de conjuntos será que llevará finalmente al descubrimiento de nuevos axiomas que tornen posible refutar la conjetura de Cantor" (186).	*fantasmagoría* (3): detección de invarianzas allende cambios en el espacio-tiempo *fantasmagoría* (4): búsqueda de hondas razones allende la matemática misma *fantasmagoría* (5): compleción de nociones conjuntistas, con nuevos axiomas *fantasmagoría* (6): búsqueda de "principios hasta ahora desconocidos"
[1964] "Suplemento". Referencias a nuevos resultados sobre CH: Hajnal, Sierpinski, Kuratowski (266). Con respecto a la indecidibilidad, "la situación en teoría de conjuntos es muy diferente de aquella en geometría [no euclideana]" (267). *Asimetría matemática* entre la existencia y la inexistencia de cardinales inaccesibles (267). *Intuición epistemológica* de una "realidad objetiva" conjuntista, que puede deberse "a otro tipo de relación entre nosotros y la realidad" (267-268). CH debe ser decidible de acuerdo con una "serie abierta de extensiones" de esa intuición (268). "Postcript" (Septiembre 1966). Referencia a resultados de indecibilidad de Cohen (269): "sin duda, el mayor avance en los fundamentos de la teoría de conjuntos desde su axiomatización" (270).	*fantasmagoría* (7): intuición epistemológica no sensible
[1970a/c] Axiomas de *escala y crecimiento* que pretenden derivar **c=$\aleph_2$** (420-422). Otros argumentos sobre otra escala dan "mucha más plausibilidad acerca de la verdad de CH que cualquier otro contraargumento", aunque es "cuestionable que toda la GCH se siga" (423). Conciencia de fallas en la prueba, "durmiendo muy mal y tomando drogas" (424).	*fantasmagoría* (8): escala que elimine lo "irracional"

Las referencias de páginas remiten a la edición de los *Collected Works*,
vol. III (para la conferencia publicada póstumamente [1940a] y para los manuscritos póstumos [1970a/c])
y vol. II (para las publicaciones en vida [1946], [1947], [1964]), Oxford: Oxford University Press, 1990 / 1995.

INTUICIÓN EXTRA-SENSIBLE

PRINCIPIOS DESCONOCIDOS

COMPLECIÓN DE LOS AXIOMAS DE LA TEORÍA DE CONJUNTOS

jerarquía de crecimiento minimal

$c=\aleph_1$

jerarquía de crecimiento maximal

$c=\aleph_2$

"OTRO TIPO DE RELACIÓN
ENTRE NOSOTROS Y LA REALIDAD"

"Lo que sucede en el alma posee el mismo grado de complicación que el mundo entero" (Cuad. Fil., t. XI, p. 89 - Cassou-Noguès, p. 43)
"Sería interesante constituir el modelo de un sistema de creencias falsas, pero estables" (Cuad. Fil., t. V, p. 333 - Cassou-Noguès, p. 49)
"Los misterios son un medio de entrever por analogía (...) lo exterior a la percepción" (Cuad. Fil., t. XI, p. 71 - Cassou-Noguès, p. 58)
"En matemáticas, la cuestión es descubrir lo que tal vez produjimos inconscientemente" (Mss. Gödel, 8c, 117 - Cassou-Noguès, p. 87)



"En esta vida no entramos nunca en contacto con la realidad (¿o hay un «despertar»…?)" (Cuad. Fil., t. X, p. 34 - Cassou-Noguès, p. 50)
"Hay otros mundos y otros seres racionales de una especie diferente y más elevada" (Convers. Wang, p. 316 - Cassou-Noguès, p. 56)
"El mundo en el que vivimos no es el único en el que viviremos, o habremos vivido" (Convers. Wang, p. 316 - Cassou-Noguès, p. 154)
"Vemos como un ciego o como a través de una oreja. Nuestras evidencias se contradicen " (Cuad. Fil., t. VII, p. 511 - Cassou-Noguès, p. 161)

[Pierre Cassou-Noguès, *Les démons de Gödel. Logique et folie*, París: Seuil, 2007]

Cartas teológicas a la madre (1961)

Octubre 29
Observaciones filosóficas sobre los fundamentos de las matemáticas

---

[1933o] (29 diciembre) – "The present situation in the foundations of mathematics" – conferencia para MAA, Massachusetts (posiblemente, primera conferencia de Gödel en USA).

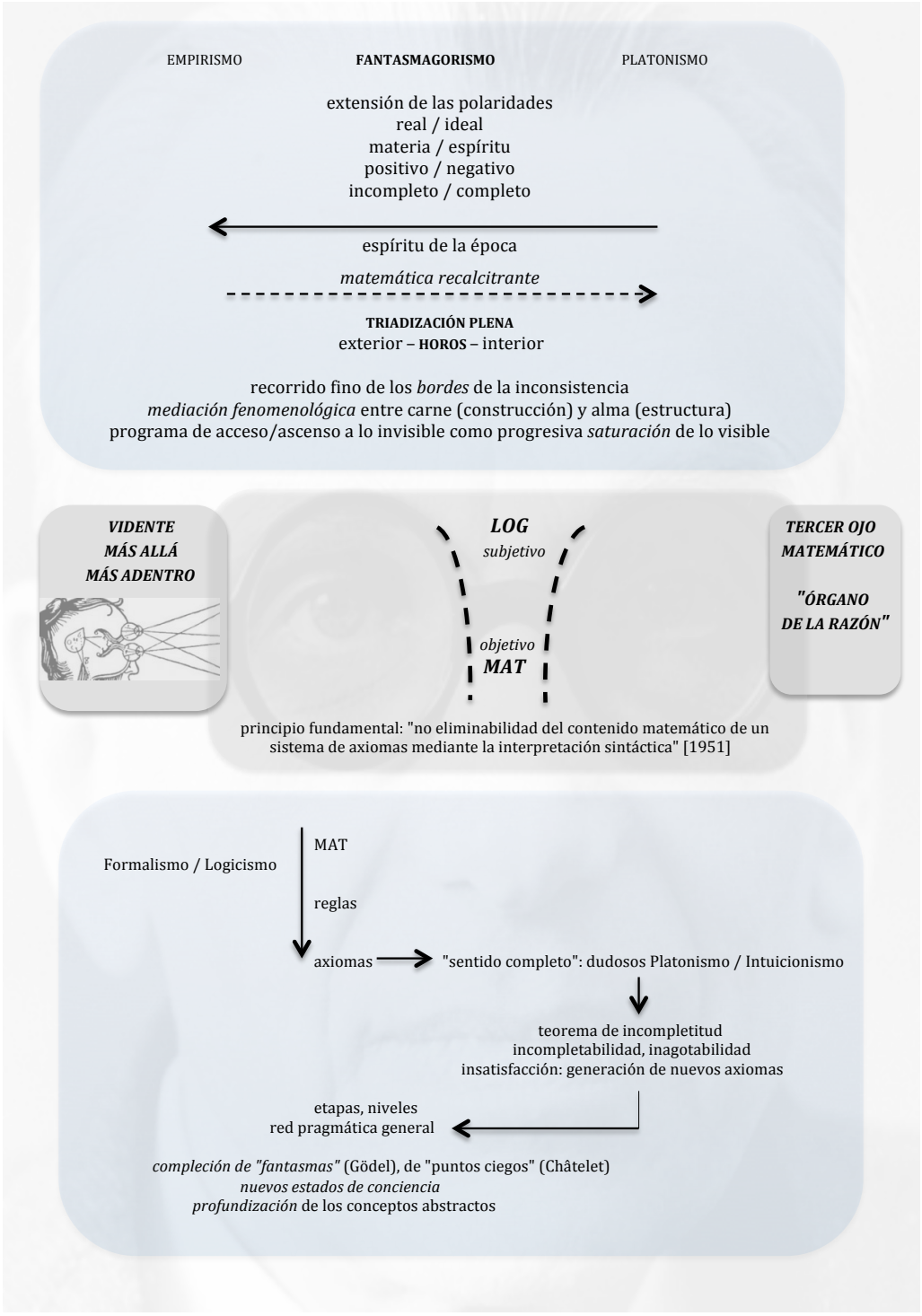
[1951] (26 diciembre) – "Some basic theorems on the foundations of mathematics and their implications" – conferencia para AMS, Josiah Willard Gibbs Lecture, Brown University.

[1953/59] "Is mathematics syntax of language?", artículo previsto como homenaje a Carnap, *The Library of Living Philosophers* – primera publicación por Francisco Rodríguez Consuegra, en: Kurt Gödel, *Ensayos inéditos*, Barcelona: Mondadori, 1994, pp. 188-240.

[1961] "The modern development of the foundations of mathematics in the light of philosophy" – borrador de conferencia, nunca ofrecida.

contenido lógico-matemático	*metodología/filosofía*
[1933o] Dos partes en los fundamentos de las matemáticas: (A) reducción precisa a axiomas y reglas, (B) justificación estructural y empírica de los axiomas (45). Tarea del *formalismo* (A): "única solución" = teoría simple de tipos (45). La "teoria de conjuntos" no es más que la "teoría de tipos cuando ciertas restricciones superfluas se eliminan" (46). Análisis consiguiente de la teoría de von Neumann: jerarquía de clases, elevación infinitaria (46). Propiedad axiomática de clausura, aunque "no hay final" – "nos vemos confrontados a una situación extraña" (47). La existencia de una infinitud de sistemas que pueden ser extendidos podría "desacreditar la teoría de tipos", pero, en realidad, es un "argumento fuerte a su favor" (48). Conexión con el teorema de *incompletitud* y "necesidad" de elevar tipos (48). Caso de proposiciones aritméticas "que sólo pueden ser probadas mediante métodos analíticos" *y*, aún peor, "solo mediante métodos que involucran cardinales extremadamente grandes" (48). La teoría de tipos "muy probablemente" permanecerá como la única solución para eliminar las paradojas y retener todas las matemáticas (49) [compare con referencia a la teoría de categorías, 1967]. Respuesta a (B): "situación extremadamente poco satisfactoria" (49). Tres dificultades esenciales: *existencia no constructiva*, basada en la ley del tercio excluso que lleva a "resultados extraños" (49), *noción de clase*, basada en división de tipos que lleva a "definiciones impredicativas" (49), *axioma de elección*, "de menor importancia para el desarrollo de las matemáticas" (!) (50). Una eventual respuesta satisfactoria a (B) llevaría a la "presuposición de una suerte de Platonismo, que no puede satisfacer ninguna mente crítica" (!) (50). Conjetura: aunque se fracasa en encontrar un "sentido inobjetable" para (B), debería poder asegurarse la no contradicción de (A) mediante "métodos inobjetables" (50). Base de esa supuesta armazón segura: distintos *niveles de la matemática intuicionista*, inducción completa, decidibilidad (51). *Incompletitud*: la conjetura es falsa – "la esperanza de éxito ha desaparecido enteramente" – aunque se tienen resultados parciales de Herbrand (52). *Negación intuicionista y doble negación* (52-53). El fundamento intuicionista posee un "valor dudoso" (53).	*fantasmagoría* (1): clausura transfinita de clases, *no* constituye sin embargo el *final* *fantasmagoría* (2): aritmética y grandes cardinales *fantasmagoría* (3): las definiciones impredicativas viven "perfectamente bien" en una totalidad de predicados existentes *fantasmagoría* (4): allende una eventual ontología, armazón de una epistemología "inobjetable" *fantasmagoría* (5): allende bordes y vaguedades, superar límites es un "campo fructuoso"
[1961] "Quisiera intentar aquí describir, en términos de conceptos filosóficos, el desarrollo de la investigación fundacional en matemáticas alrededor del giro de siglo, y enmarcarlo en un esquema general de posibles visiones de mundo" (375). *Grado* y *modo* de las visiones de mundo gracias a su afinidad, o alejamiento, de la *metafísica* (o religión): (izquierda) escepticismo, materialismo y positivismo *versus* espiritualismo, idealismo y teología (derecha) (375*). Formas mixtas* (375). Desarrollo ("violento", "fanático") de la filosofía: "de derecha a izquierda, no en línea recta, sino con reveses" (375). Desarrollo histórico de la matemática hasta fines del XIX, situado a derecha, "en contra del espíritu de su tiempo" (377). Sin embargo, al giro de siglo, las antinomias de la teoría de conjuntos, "exageradas por escépticos y empíricos", sirvieron de "pretexto para una revolución hacia la izquierda" (377). Aunque las antinomias se sitúan en el borde extremo de la lógica, lejos de las matemáticas, su exageración lleva a una matemática "empírica" (377) y "nihilista", de acuerdo con el espíritu de la época (379). Reacción matemática recalcitrante: aparición de "esa cosa hermafrodita curiosa que representa el formalismo de Hilbert" (!) (379). En realidad, "resulta imposible rescatar los antiguos aspectos a derecha de las matemáticas de tal manera que se esté más o menos de acuerdo con el espíritu del tiempo" (381). Por *incompletitud*, "la combinación hilbertiana de materialismo y de aspectos de la matemática clásica resulta ser imposible" (381). No se deben abandonar la salvaguardia de la matemática, ni la fuerza de la razón, solo porque así lo indica la filosofía predominante de la época (!) (381). Actitud correcta: "la verdad yace en la mitad, o consiste en una combinación [de las direcciones izquierda y derecha]" (381). El intento de Hilbert fue "demasiado primitivo y tendiente demasiado fuerte a una dirección" (381), y debe explorarse otra "combinación trabajable" donde se "cultive (profundice) el conocimiento de los conceptos abstractos" (383). ¿Cómo logarlo?: mediante una clarificación *no lógica* (definicional), sino *fenomenológica* (atención actuante) (383). Ejemplo del crecimiento de un niño como progresiva superación de estados de conciencia (384-385) y metáfora asociada al crecimiento de una ciencia empírica (385). El éxito del crecimiento empírico podría anunciar un éxito similar en el crecimiento abstracto, visible en la conformación de *nuevos axiomas*, en concordancia con la filosofía kantiana (385). "Profunda verdad" de Kant en un *sentido amplio* (opuesto a un sentido literal falso) (385). *Mediación* fenomenológica y gran futuro de un Kant correctamente entendido (387).	*fantasmagoría* (6): propósito y razón allende la "muerte" *fantasmagoría* (7): antinomias conjuntistas "exageradas" *fantasmagoría* (8): Hilbert hermafrodita *fantasmagoría* (9): hay que superar el espíritu de la época *fantasmagoría* (10): profundización de lo abstracto *fantasmagoría* (11): "nuevo estado de conciencia" *fantasmagoría* (12): aparición de "nuevos axiomas"

Las referencias de páginas remiten a la edición de los *Collected Works*, vol. III, Oxford: Oxford University Press, 1995.


EMPIRISMO
FANTASMAGORISMO
PLATONISMO
extensión de las polaridades
real / ideal
materia / espíritu
positivo / negativo
incompleto / completo
espíritu de la época
matemática recalcitrante
TRIADIZACIÓN PLENA
exterior – HOROS – interior
recorrido fino de los bordes de la inconsistencia
mediación fenomenológica entre carne (construcción) y alma (estructura)
programa de acceso/ascenso a lo invisible como progresiva saturación de lo visible
VIDENTE
MÁS ALLÁ
MÁS ADENTRO
LOG
subjetivo
objetivo
MAT
TERCER OJO
MATEMÁTICO
"ÓRGANO
DE LA RAZÓN"
principio fundamental: "no eliminabilidad del contenido matemático de un sistema de axiomas mediante la interpretación sintáctica" [1951]
Formalismo / Logicismo
MAT
reglas
axiomas
"sentido completo": dudosos Platonismo / Intuicionismo
teorema de incompletitud
incompletabilidad, inagotabilidad
insatisfacción: generación de nuevos axiomas
etapas, niveles
red pragmática general
compleción de "fantasmas" (Gödel), de "puntos ciegos" (Châtelet)
nuevos estados de conciencia
profundización de los conceptos abstractos

Noviembre 5
Prueba ontológica de la existencia de Dios
Diagrama de la creatividad en Gödel

[1970] "Ontological proof" – discusión con Dana Scott, febrero 1970 – inédito, publicación póstuma 1995.
Fragmentos previos. Circa 1941, una hoja en alemán. *Circa* 1954-1955, fragmentos del Cuaderno Phil XIV.

contenido lógico-matemático	*metodología/filosofía*
Feb. 10, 1970 $P(\varphi)$ φ is positive (or $\varphi \in P$). *Axiom* 1. $P(\varphi).P(\psi) \supset P(\varphi.\psi).$[1] *Axiom* 2. $P(\varphi) \vee P(\sim\varphi).$[2] *Definition* 1. $G(x) \equiv (\varphi)[P(\varphi) \supset \varphi(x)]$ (God) *Definition* 2. $\varphi \,\text{Ess.}\, x \equiv (\psi)[\psi(x) \supset N(y)[\varphi(y) \supset \psi(y)]].$ (Essence of x)[3] $p \supset_N q \;=\; N(p \supset q).$ Necessity *Axiom* 3. $P(\varphi) \supset NP(\varphi)$ $\sim P(\varphi) \supset N\sim P(\varphi)$ because it follows from the nature of the property.[a] Theorem. $G(x) \supset G\,\text{Ess.}x.$ *Definition.* $E(x) \equiv (\varphi)[\varphi\,\text{Ess}\,x \supset N(\exists x)\,\varphi(x)].$ (necessary Existence) *Axiom* 4. $P(E).$ Theorem. $G(x) \supset N(\exists y)G(y),$ hence $(\exists x)G(x) \supset N(\exists y)G(y);$ hence $M(\exists x)G(x) \supset MN(\exists y)G(y).$ (M = possibility) $M(\exists x)G(x) \supset N(\exists y)G(y).$ | $M(\exists x)G(x)$ means the system of all positive properties is compatible. 2 This is true because of: *Axiom* 5. $P(\varphi).\varphi \supset_N \psi :\supset P(\psi)$, which implies $\begin{cases} x = x & \text{is positive} \\ x \neq x & \text{is negative.} \end{cases}$	** Primer Teorema* (definiciones 1 y 2) intercambio variables, generalización universal, necesitación ** Segundo Teorema* G(x) (premisa) E(x) (definición 1 + axioma 4) N(∃y)G(y) (definición E + Primer Teorema) * uso implícito de la regla de necesitación en la línea siguiente al Segundo Teorema y del hecho N(p⊃q) ⊃(Mp⊃Mq) * uso implícito de MNp ⊃ Np (axioma característico de S5) * axiomas 1, 2, 3 y 5 ligados a la compatibilidad del sistema de propiedades positivas
Fragmentos. *Circa* 1941. Dos series de fórmulas ligadas a "existencia necesaria" (429) y a "propiedades positivas" (431). "Si el concepto de existencia necesaria es consistente, entonces hay cosas que lo satisfacen" (431). "Las propiedades de Dios deben ser definidas por propiedades de segundo orden" (431), y, de la misma manera, la noción de *esencia* debe definirse en segundo orden (431). *Circa* 1954-1955. "Si la prueba ontológica es correcta, se puede llegar al entendimiento *a priori* de la existencia (actualidad) de un objeto no-conceptual" (431). "Filosofía: Dedicarse a la filosofía es saludable en cualquier caso, aún si no emergen resultados positivos de allí (y permanezco perplejo). Posee el efecto que «el color aparece más brillante», es decir, que la realidad aparece como tal con mayor claridad" (433). La prueba ontológica debe "basarse solo sobre *axiomas* y *no* sobre una definición (= construcción) de «positivo», puesto que una construcción es compatible con una relación arbitraria" (433). El *ser*: autorreferente armónico, impulsa la multiplicidad, la diversidad, la variedad (433). "Tal vez los axiomas lógicos (conjuntistas) pueden ser derivados de axiomas de causalidad" ("el concepto filosófico fundamental es la causa") (433). "La mayor ventaja + la menor desventaja es negativa" (435). Las propiedades positivas conforman un conjunto maximalmente consistente (435). "Las únicas proposiciones sintéticas son aquellas de la forma *φ(a)* (por ejemplo: *yo* tengo esta propiedad), puesto que no poseen sentido objetivo, es decir: no dependen de Dios, sino de la cosa *a*" (437).	completitud - maximalidad esencia/arquetipo en *segundo orden* posible encarnación de lo fantasmal interés exploratorio de la filosofía absoluticidad de la prueba ontológica maximalidad variacional del ser primalidad del concepto de causa maximalidad de lo positivo síntesis – independiente de Dios

Las referencias de páginas remiten a la edición de los *Collected Works*, vol. III, Oxford: Oxford University Press, 1995.

DIAGRAMA DE LA CREATIVIDAD EN GÖDEL:
EL TRIPLE REGISTRO DE UN GENIO RECALCITRANTE



la mano / el ojo

INTERIOR	*HOROS*	EXTERIOR
estructura rígida real (exclusión fantasmal)	*estructuras plásticas* *(vaivén entre lo visible y lo invisible)*	estructura plena ideal (inclusión fantasmal)
completitud (expansión)	*péndulo razón - co/razón* *(diástole / sístole)*	incompletitud (contracción)
recursión primitiva	*computabilidad: borde privilegiado* *entre lo relativo y lo absoluto*	recursión general
lógica clásica (compacidad, Löwenheim-Skolem)	*traducción de la doble negación* *infinitas lógicas intermedias*	lógica intuicionista (contrapuntos topológicos y modales)
MINIMALIDAD relatividad Con (ZF + $2^{\aleph_0} = \aleph_1$) control relativo de lo constructible	*mixto de ramificación y reducibilidad* *principio de reflexión* *búsqueda de axiomas intermedios*	MAXIMALIDAD absoluticidad nuevos axiomas $\Rightarrow 2^{\aleph_0} = \aleph_2$ descenso al concepto de conjunto
insuficiencia de la sintaxis lógica	*UMBRAL GÖDELIANO ESENCIAL: enlace* *logicismo/intuicionismo/formalismo*	relevancia semántica de la matemática
espíritu de la época adecuación conforme a la norma	*nuevas formas de tiempo y de espacio*	abstracción atemporal rebelión matemática recalcitrante
navaja de Ockham en la escritura (artículos, monografía)	*borradores de conferencias*	liberación amplia en el habla (conversaciones con Wang)
actualidad de la muerte conciencia interna	*teoría general de lo fantasmal*	potencialidad de otras vidas nuevos estados de conciencia



las manos / los ojos

"En el límite extremo del desgarramiento no queda nada más que las condiciones del tiempo o del espacio.
En ese límite el hombre se olvida de sí mismo porque está por entero en el interior del momento.
El Dios olvida porque no es nada más que tiempo". *Hölderlin.*

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA – SEDE BOGOTÁ – DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

EPISTEMOLOGÍA E HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS
SEMINARIO CONTINUO DE FILOSOFÍA DE LAS MATEMÁTICAS
2015-I

GROTHENDIECK

(1ª PARTE – 1/3)







"Es realmente por el descubrimiento sobre todo de *preguntas* nuevas, de *nociones* nuevas,
o aún de *puntos de vista* nuevos, o de nuevos *mundos*, que mi obra matemática ha resultado ser fecunda" [Grothendieck, 1985]

1	*(2 feb)*	*Mapa del seminario: el mayor matemático del siglo XX (primera parte 1928-1960).*
2	*(4 & 9 feb)*	*Espacios vectoriales topológicos y espacios holomorfos: grandes conceptos y problemas.*
3	*(11 & 16 feb)*	*Categorías abelianas y K-teoría: grandes conceptos y problemas.*
4	*(18 & 23 feb)*	*1950: el entorno filosófico, técnico y biográfico.*
5	*(25 feb & 2 mar)*	*La tesis doctoral: productos tensoriales y espacios nucleares (1951/1953).*
6	*(4 & 9 mar)*	*EVT – Resumen de la teoría métrica de productos tensoriales topológicos (1953/1954).*
7	*(11 & 16 mar)*	*Las categorías abelianas (1) (1955/1956).*

[La anormalidad académica –huelgas y bloqueos 2015-I– redujo en lo que sigue las exposiciones de estudiantes]

8	*(8 abr)*	*Las categorías abelianas (2) (1955/1956).*
9	*(6 may)*	*La K-teoría: teorema de Riemann-Roch generalizado (1957).*
10	*(13 may)*	*Los espacios de funciones holomorfas (1960). La clave de los sueños (1) (1987).*
11	*(20 may)*	*La clave de los sueños (2) (1987).*
12	*(27 may)*	*Diagrama inicial de la creatividad en Grothendieck (fin de la primera parte).*

SALÓN 404-212	miércoles	lunes subsiguiente (cuando indicado)
14.00-16.00	presentación del coordinador	presentaciones de estudiantes y complementos

Prerrequisitos.

Pregrado de Matemáticas: madurez matemática, tipo *Grupos y Anillos*, *Topología* o equivalente. Posgrado de Matemáticas: abierto. Otras Carreras y Posgrados, acercarse a discutir la idoneidad (o no idoneidad) con el instructor.

Evaluación.

Cada estudiante inscrito al **curso** *Epistemología e historia de las matemáticas* deberá proponer, a mediados de semestre, el tema de un ensayo escrito (E), que desarrollará en la segunda mitad del semestre, y obtendrá también una nota de participación (P), asociada a las presentaciones complementarias de los días lunes. La nota final del curso se obtendrá mediante la fórmula 0.3P + 0.7E.

Bibliografía.

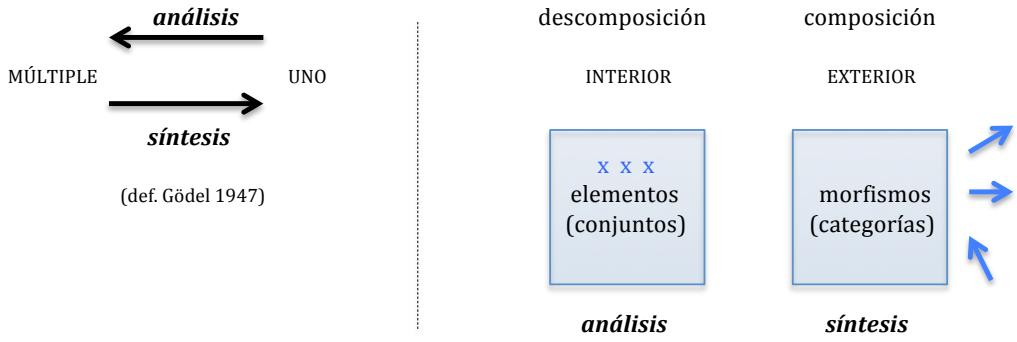
Alexander Grothendieck, *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires* (Tesis Doctoral, 1953), *Memoirs* AMS 16, 1955.
Alexander Grothendieck, "Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques" (1953), *Bol. Soc. Mat. Sao Paulo* 8 (1956): 1-79.
Alexander Grothendieck, *Topological Vector Spaces* (1954), New York: Gordon and Breach, 1973.
Alexander Grothendieck, "Sur quelques points d'algèbre homologique" (1955), *Tohoku Mathematical Journal* 9 (2ª serie) (1957): 119-221.
Alexander Grothendieck (escritura por Borel & Serre), "Le théorème de Riemann-Roch" (1957), *Bull. Soc. Math. France* 86 (1958): 97-136.
Alexander Grothendieck, "Techniques de construction en géométrie analytique I-X", *Séminaire Cartan* 13 (1960-1961).
Alexander Grothendieck, *La Clef des Songes* (1987), manuscrito.

Fernando Zalamea - Oficina: 405-327 - Tel. (oficina): 3165000-13214
Mail: fernandozalamea@gmail.com - Web: www.docentes.unal.edu.co/fzalameat/

SEMINARIO CONTINUO DE FILOSOFÍA DE LAS MATEMÁTICAS
2015-I – GROTHENDIECK

Febrero 4
Espacios vectoriales topológicos y espacios holomorfos:
grandes conceptos y problemas

Dos formas de una "tensión esencial"



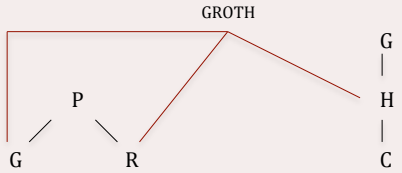
La obra de Grothendieck participa muy activamente en tales tensiones:
primera década (1950-1960) – más cercana al "análisis"
segunda década (1960-1970) – más cercana a la "síntesis"
tercera década (1980-1990) – más cercana a la "horosis" (frontera)

Fuerzas transversales y pendulares en Grothendieck

(A) multiplicación
objetivación en la multiplicidad / disolución de lo singular
(B) abstracción
libertad y plasticidad en la generalidad / excepcional poder creativo
(C) naturalización
revolución & naturalidad / profundidad & sencillez
(D) transición
multiplicatividad de la transversalidad / traducibilidad en vaivén reticular
(E) suavización
dialéctica (adjunciones) / armónica (representaciones) (yin/marea)

TEORÍA DE HACES (encarnada en categorías abelianas, esquemas, topos):
enlace perfecto de fuerzas (A)-(E)

Situación en el Seminario Continuo de Filosofía de las Matemáticas



espacios de Banach

L-espacios (≈ L^1 (absolut. integrables))
C-espacios (≈ C(K) (continuas sobre compacto))

espacios finito dimensionales

espacios nucleares

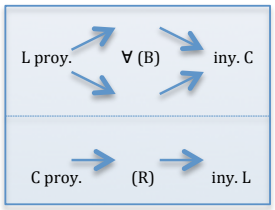
(seminormas "telescópicas"
espacios de funciones "suaves"
"calcos" FIN → INF)

productos tensoriales

aproximaciones (topológica, métrica) de operadores
(semi)normas inyectivas y proyectivas

comienzos de estrategias categóricas

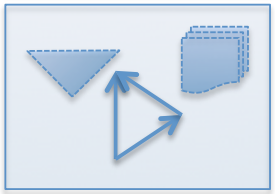
1. Estudio de "universales" en Espacios de Banach (B)
   Banach-Mazur: **∀ (B)** ≈ L-cociente & C-subespacio
   Pregunta: ¿qué sucede con L-subespacios & C-cocientes?
   Grothendieck: tienen que ser **espacios reflexivos** (R)
   (isomorfismo con el doble dual)



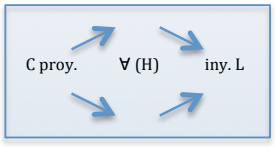
2. Caracterización de subclases de espacios de Banach mediante el comportamiento de operadores definidos sobre los espacios (atención especial a compacidad débil)



3. Detección de "arquetipos" en espacios de Banach:
   • espacios de Hilbert (H), L-espacios, C-espacios
   A partir de estos "teje" la categoría mediante:
   • envolventes (inyectivas, proyectivas)
   • factorización de operadores
   • pegamiento local/global (ideales operadores)
   • límites local/global (vía subespacios dim. fin.)



4. Solución sorprendente de Banach-Mazur:
   ∀ (H) ≈ L-subespacio & C-cociente



5. Desigualdad fundamental: un nuevo "arquetipo"
   ∀ normas tensoriales inyectivas (identidad) ≤ K
   (K constante de Grothendieck, valor exacto aún desconocido)

¿Inventa, define, descubre? multitud de problemas para las generaciones futuras.

(Thom 1982): variable compleja ≡ corazón de la matemática

razón ⇄ co/razón (FZ)

a/mor (FR)



tejido geométrico profundo

Riemann-Roch
(enlace dimensión geométrica intrínseca curva / dimensión analítica extrínseca espacio meromorfas)

geometría algebraica ⇄ geometría analítica (por analiticidad ≡ holomorfía)

(Serre *GAGA* 1956 - Grothendieck *TCGA* 1960)

esquemas ⇄ variedades holomorfas

(nilpotentes en anillos locales)

"arquetipo": construcción de un espacio analítico de representación universal
("Espacio de Teichmüller")
"clasificador" de las curvas algebraicas sobre los espacios analíticos

técnicas:
- axiomatización de propiedades funtoriales globales
- jerarquía escalonada de funtores parciales locales
- recubrimientos, acciones de grupo, cambios de base

EMERGENCIA PROGRESIVA DE UNA
MATEMÁTICA RELATIVA

DETECCIÓN DE **INVARIANTES** UNIVERSALES GLOBALES
*DEBIDO A LA **VARIACIÓN** COHERENTE MISMA* DE LOS OBJETOS LOCALES

Febrero 11
Categorías abelianas y K-teoría:
grandes conceptos y problemas

CATEGORÍAS ABELIANAS

marco axiomático de enlaces naturales

co/homología a coeficientes en un haz

funtores derivados de funtores de módulos

variable compleja
geometría algebraica
topología
álgebra abstracta
homología
lógica infinitaria

CO/RAZÓN
haces
(definiciones, ejemplos, teoremática)

ejemplo central de "clase" (= categoría) abeliana
haces (de módulos) sobre un espacio topológico

teoremática central
existencia de suficientes inyectivos

cambio central de perspectiva
argumentos cohomológicos basados sobre objetos abelianos (haces)
en vez de hacerlo sobre objetos no abelianos (espacios) [Gelfand & Manin 1996]

multitud de variaciones de ejemplos:
módulos, grupos abelianos, grupos topológicos abelianos compactos,
acciones de grupo, espacios holomorfos, gérmenes, formas diferenciales

MATEMÁTICA RELATIVA Y VARIACIÓN SOBRE LA BASE
"hacer álgebra homológica será cambiar la clase abeliana todo el tiempo"
"lenguaje módulo C de Serre"

GENERALIDAD ("sans hypothèse restrictive") – SUAVIDAD ("assouplissement")

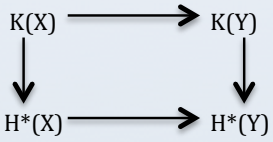
K-TEORÍA

marco abstracto de generalización del teorema de Riemann-Roch

introducción de "grupo misterioso" K(X):
clases formales de fibrados vectoriales sobre variedad algebraica X (+ condiciones adicionales)
(*K* por "classen", clases en alemán)

enlace de K(X) con cohomología H*(X) (caracteres de Chern)

la "variación natural" *no es conmutativa* (OBSTRUCCIÓN)



pero mediante controles de "desviación" (clases de Todd) (TRÁNSITO)

se obtiene un *teorema Riemann-Roch-Hirzebruch-Grothendieck*
que "ajusta" la conmutatividad del diagrama
(caso particular: fórmula calculatoria que enlaza género y dimensión en Riemann-Roch)

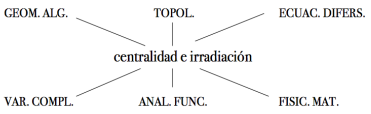
LOS *TIPOS* DE ESPACIO Y NÚMERO SE OBTIENEN COMO SUBDETERMINACIONES DE UN *ARQUETIPO* GENERAL

INFLUENCIA MAYOR: TEOREMA DEL ÍNDICE

tránsito y obstrucción en los cambios de la naturaleza, caracterizados por la geometría del entorno

índice: (#soluciones) - (#restricciones) para operadores diferenciales elípticos
determinado por adecuados invariantes topológicos
[inestables por separado, muy sensibles localmente; pero **diferencia** estable globalmente!]

el teorema del índice: influencia
uno de los teoremas mayores –y profundamente característicos– del siglo XX



Riemann-Roch (1850)	
control algebraico (dimensión) meromorfas	control topológico (género) superficies Riemann

generalizable a control global de soluciones de sistemas lineales con parámetros algebraicos,
mediante invariantes topológicos:

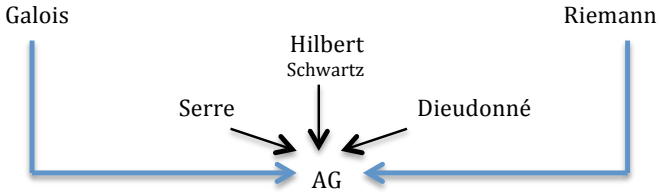
Schmidt (1929)	→	curvas algebraicas
Cartan-Serre (1950) - Hirzebruch (1954)	→	haces (*un* sistema)
Grothendieck (1957)	→	K-teoría (*todos* los sistemas)
Hirzebruch - Atiyah (1958)	→	K-teoría topológica (parámetros continuos)
Gelfand (1960)	→	enunciado genérico (invarianza homotópica índice)
Atiyah - Singer (1963)	→	**teorema del índice**

Febrero 18
1950: entornos técnico, filosófico y biográfico

(A). ENTORNO TÉCNICO

INFLUENCIA

autodidacta



HERENCIA

enorme rango de continuadores
escuelas mayores en Francia y Rusia
Panorama Fields (1970-hoy): "notas al pie a Grothendieck"

[véase Segunda Parte del Seminario Grothendieck, 2/3, 2015-II]

(B). ENTORNO FILOSÓFICO

ingenuidad – ingeniosidad
co/razón sensible (pianista / artesano del lenguaje)

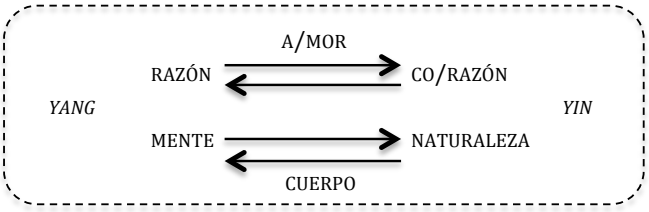
CORAZÓN METODOLÓGICO
RELATIVIZACIÓN / GENERALIZACIÓN
MULTIPLICACIÓN / UNIFICACIÓN
SUAVIZACIÓN / NATURALIZACIÓN

Maurice MERLEAU-PONTY
[1960-1961, *Lo visible y lo invisible*, *El ojo y el espíritu*]

versus dualidad cartesiana mente/naturaleza, Merleau-Ponty incita a una
observación fenomenológica donde el cuerpo ejerce como tercera vía

FRONTERA

"el cuerpo es un *haz* de funciones que entrelaza visión y movimiento"
"lo propio de lo visible es tener un doblez de *invisibilidad en un sentido estricto*"
"el despliegue del mundo *sin pensamiento separado* es precisamente ontología moderna"



(C). ENTORNO BIOGRÁFICO (1ª parte: 1928-1960)

[referencias fundamentales: Scharlau, Schneps, Jackson]

1928 (Marzo 28)	Nacimiento en Berlín (padres: Alexander/Sascha Schapiro 1890-1942, Johanna/Hanka Grothendieck 1900-1957)	
1928-1933	Infancia en Berlín (con padres y hermana Maidi, nacida 1924, en matrimonio previo de Hanka)	
1934-1939	Colegio y Liceo en Blankenese (Hamburgo) (bajo familia Heydorn, pastor protestante; sus padres luchan en la Guerra Civil española)	
1939	Reencuentro con sus padres en Francia	
1940-1942	Internado con Hanka como "indeseables" en el campo de Rieucros (el padre es internado en Le Vernet y luego deportado a Auschwitz, 1942)	
1942-1944	Disolución de Rieucros – Alexander enviado al Liceo Cévénol en Le Chambon (bajo familia Trocmé, pastor protestante)	
1945-1948	Vive en Mairargues, pequeño pueblo en medio de los viñedos, mientras realiza sus estudios de matemáticas en la Universidad de Montpellier (Noviembre 1945: ingreso; Junio 1946: Certificat d'études supérieures, "Très bien"; 1948: Licence)	Redescubre y reescribe la teoría de la medida de Lebesgue
1948	André Magnier detecta la "genialidad" de Grothendieck y le otorga una beca de estudios para París (carta de recomendación de Monsieur Soula, profesor en Montpellier, para "Cartan")	
1948-1949	Oyente en el Seminario Cartan, ENS (topología algebraica y haces)	
1949-1953	Dirigido a la Universidad de Nancy, bajo Schwartz y Dieudonné Beca del CNRS – Realiza su Tesis Doctoral (defensa 28 Febrero 1953) (resolución de todos los problemas propuestos por Schwartz-Dieudonné; elaboración de varios artículos, cada uno digno de Tesis, obra "solo comparable con Banach y Hilbert" [Dieudonné 1966]) Ingresa ("cobaye", 1951) al grupo Bourbaki	***Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires*** [Tesis, publ. AMS, 1955] Primera decena de artículos sobre análisis funcional [1950-1953]
1953-1954	Enseña en la Universidad de Sao Paulo	***Espaces vectoriels topologiques*** [libro mimeografiado, Sao Paulo, 1954; trad. imglés, 1973] **"Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques "** [publ. Sao Paulo, 1956]
1955	Investigación en la Universidad de Kansas Intensa correspondencia con Serre Visita Chicago – Regresa a París	Trabajos en categorías abelianas **"Sur quelques points d'algèbre homologique"** [publ. Tohoku 1957] Segunda decena de artículos sobre análisis funcional [1954-1957]
1956	Obtiene una posición de trabajo en el CNRS	
1957	Bourbaki (marzo): el congreso del "funtor inflexible" *Mathematische Arbeitstagung* (julio) – Universidad de Bonn Muerte de la madre (diciembre)	Trabajos en Riemann-Roch **"Le théorème de Riemann-Roch (d'après des résultats inédits de A. Grothendieck)"** [publ. Borel & Serre, Bull. SMF, 1958]
1958	Plenaria (agosto) en el Congreso Internacional de Matemáticas Visita (octubre) a Harvard (Zariski, Tate, Mumford)	Visión de la geometría algebraica **"The cohomology theory of abstract algebraic varieties"** [Proc. ICM, Edimburgo, 1958]
1959	Junto con Dieudonné, es nombrado (marzo) profesor en el IHES	
1960	Cinco hijos: 1 con Alice, Nancy, 1950s – 3 con Mireille, París, 1959, 1961, 1965 – 1 con Justine, Comunidad, 1970s	**"Techniques de construction en géométrie analytique. I-X"** [Sem. Cartan, tomo 13, 1960-1961]

Febrero 25

La tesis doctoral: productos tensoriales topológicos y espacios nucleares

---

Artículos asociados

1950-51 Cinco primeras notas breves (13pp., *CRAS* 230, 231, 233)
(evt, duales, compacidad, patologías, productos tensoriales topológicos)

1952 "Critères de compacité dans les espaces fonctionnels généraux" (*Amer. J. Math* 74: 168-186)
"Résumé des résultats essentiels dans la théorie des produits tensoriels topologiques et des espaces nucléaires" (*Ann. Inst. Fourier* 4: 73-112) (resultados concebidos en "otoño 1951")
[1952] "Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires" (*Sem. Bourbaki* 69: 193-200 - Dic. 1952)

1953 "Sur les applications linéaires faiblement compactes d'espaces du type C(K)" (*Canad. J. Math.* 5: 129-173)
"Sur les espaces de solutions d'une classe générale d'EDP" (*J. Analyse Math.* 2: 243-280)
"Sur certains espaces de fonctions holomorphes I, II" (*J. reine angew. Math.* 192: 35-64, 77-95)

Tesis

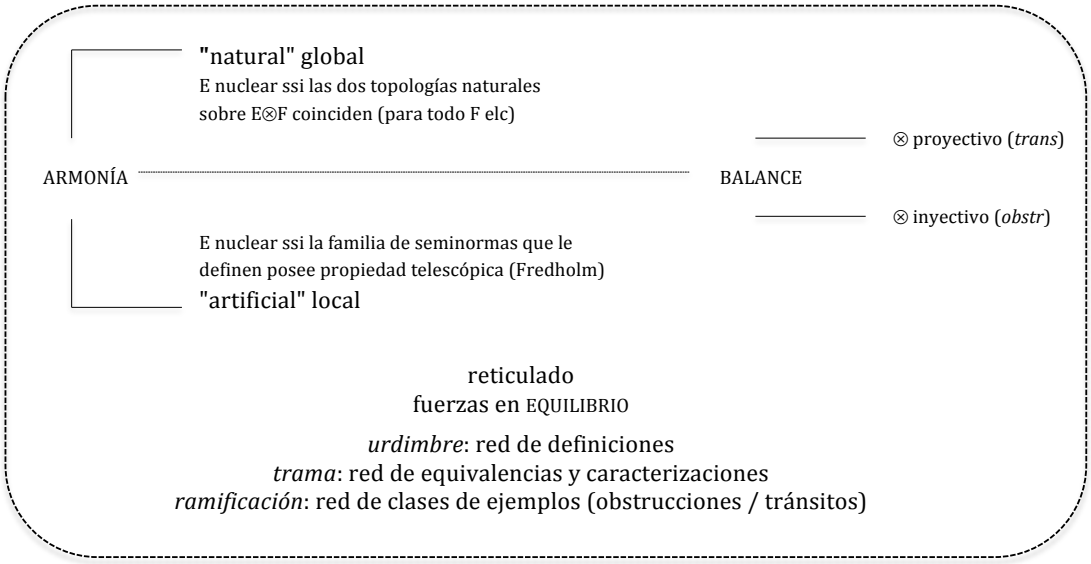
1953 Tesis Doctoral *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires* – Tesis Complementaria sobre teoría de haces
(Defensa 28 Febrero: Presidente del Jurado, Henri Cartan; Jurados: Schwartz, Dieudonné, Choquet)
Extractos del Reporte Schwartz: "Grothendieck posee a su activo varias memorias importantes, cada una de las cuales podría constituir una Tesis" – "Muchas ideas originales, una técnica perfecta (cada demostración es tan corta como sea posible y utiliza exactamente los métodos adecuados)" – "Carácter y valor muy excepcionales" – "El autor ha adquirido una tal virtuosidad que no es exagerado considerarlo como el mayor especialista mundial en la materia".

1955 **[1955] *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires*** *(Memoirs Amer. Mathem. Soc.*, No. 16)

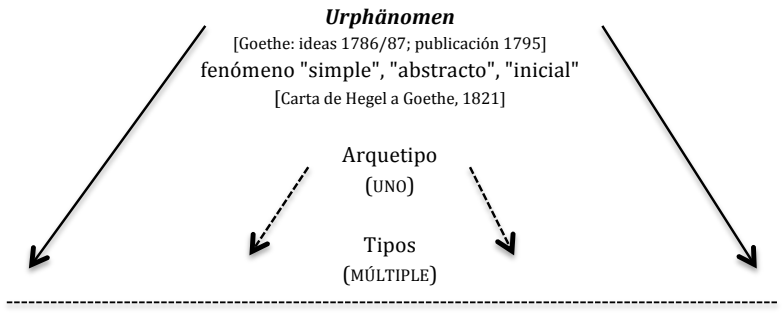
[1952] "Produits..." *(Sem. Bourbaki)*	Caso de espacios de Banach: primer "producto tensorial normado completo" (^) (norma proyectiva), segundo producto tensorial normado completo (^^) (norma inyectiva); topologías "razonables" en el ⊗ de evt loc. conv. elc) yacen entre (^) y (^^) (193). Definiciones para el caso general de elc; aplicación lineal canónica (^) → (^^) (194). Operadores de Fredholm: "telescopía" (194). Caracterización de productos tensoriales proyectivos con L^1 (Dunford-Pettis generalizado), obstrucciones con L^p (p>1) (195). Buenos ejemplos de productos tensoriales sobre espacios nucleares (espacios de funciones suaves u holomorfas) (195). Definición global de espacios nucleares (vía isomorfismo topológico de (^) y (^^) para todos elc) – Caracterizaciones semi-globales (para todos Banach, para l^1) - Caracterización local (vía operadores de Fredholm) (196). Reducción: Banach nucleares = dimensión finita (197). "Teoremas de permanencia": estabilidad bajo duales, cerrados, cocientes, productos arbitrarios, sumas enumerables, etc. (pensamiento categórico, tipos de infinitud) (197). "Propiedades de elevación" (extensión sobre nucleares) (198). "Propiedades de decrecimiento rápido" (sucesiones de valores propios rápidamente convergente) (200).
[1953/55] ***Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires***	Introducción (3-27, 1ª parte). Objetivo: "estudio sistemático" de productos tensoriales topológicos y de "una nueva clase notable", los espacios nucleares (3). Perspectiva: observación desde *todos* los evt localmente convexos "generales" (4). Notaciones, límites inductivos, casos especiales, recordatorios. Capítulo 1 – "Teoría general de los productos tensoriales topológicos" (28-191, 1ª parte). §1 Producto proyectivo: generalidades, definiciones, "propiedades de permanencia" (clausura de construcciones categóricas). §2 Casos especiales (tipo Fréchet, tipo sumabilidad). §3 Variantes diversas de productos tensoriales: producto inductivo, operadores de Fredholm, topologías varias en el producto tensorial. §4. Dualidad: formas bilineales y lineales. §5. Problemas de aproximación. Capítulo 2 – "Teoría de los espacios nucleares" (3-140, 2ª parte). §1. Clases notables de operadores de Fredholm. §2. Teoría "interna" de los espacios nucleares: definiciones, caracterizaciones, propiedades de permanencia, ejemplos. §3. Producto tensorial topológico de un espacio nuclear por un espacio localmente convexo: extensión (ascenso, relevo), permanencia, dualidad, casos funcionales usuales. §4. Producto tensorial de espacios tipo Fréchet y distribuciones: consideraciones generales y contraejemplos, espacios escalonados, aplicaciones. "Preguntas no resueltas" (135-137). Algunas características: • escritura *à la* Bourbaki (primera Tesis Doctoral de un matemático excepcional con ese estilo) • habilidad inventiva del lenguaje (red de definiciones apropiadas) • esclarecimiento de situaciones generales y posteriores aplicaciones • discriminación exacta (descenso) de equivalencias, suficiencias y necesidades entre los conceptos introducidos • entendimiento en la pluralidad (categorías) y construcción de bordes (tipos) a partir de límites (arquetipos)

Los números de páginas remiten a los textos originales [1952], [1955]
Resúmenes complementarios en [Pietsch 2007], [Diestel 2014]

(A) ARMONÍA GROTHENDICKIANA EN LOS PRODUCTOS TENSORIALES TOPOLÓGICOS

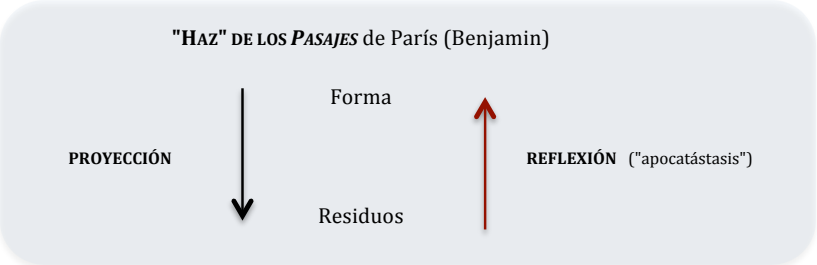


(B) ARQUETÍPICA GROTHENDICKIANA EN EL CONTEXTO ROMANTICISMO-MODERNIDAD



Hannah Arendt sobre Walter Benjamin [1968]:

Para él [Benjamin] el tamaño de un objeto tenía una relación inversamente proporcional a su importancia.
Y esta pasión (...) derivaba directamente de la única visión del mundo que siempre tuvo una influencia decisiva sobre él,
la **convicción de Goethe sobre la real existencia de un *Urphänomen*, un fenómeno arquetípico,**
una cosa concreta que se podía descubrir en el mundo de las apariencias donde la "significación" y la apariencia, palabra y cosa, idea y experiencia coincidirían.
Cuanto más pequeño el objeto, más parecía poder contener la forma más concentrada de todo lo demás.



Marzo 4

Espacios vectoriales topológicos

Resumen de la teoría métrica de productos tensoriales topológicos

---

1953-1956 Decena de artículos en análisis funcional

1953 **[1956] "Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques"**
Bol. Soc. Mat. Sao Paulo 8 (1956): 1-79.

1954 *Espaces vectoriels topologiques* (curso dictado IMPA, Sao Paulo 1952; escrito y multicopiado 1954)
Traducción: *Topological Vector Spaces*, New York: Gordon and Breach, 1973 (Prefacio, 1968?).

[1956] ***Résumé…***	"INTRODUCCIÓN" (1-5). "Resultados completamente nuevos sobre los espacios clásicos L^1, L^2, $L\infty$" (1). "La teoría de productos tensoriales topológicos de espacios localmente convexos generales gana en *claridad* y *sencillez* al exponerse primero para los espacios de Banach" (1). Búsquedas metodológicas: "*despejar* una sucesión lógica de ideas" (1), rastrear "consecuencias *naturales*" (1), adoptar una terminología nueva que lleve a "*simplicidad*, *coherencia* y *simetría*" (2), proporcionar "formas *concisas* y *sugestivas*" (2), abordar "en *un solo golpe* de vista las relaciones entre las muy *numerosas variantes* del teorema fundamental" (2), llegar a una "comprensión *verdadera*" de la teoría (2). [nuestras cursivas] §1 (7-16) "LAS ⊗-NORMAS". "Normas razonables" en un producto tensorial de espacios de Banach: ∧ (proyectiva, "más grande"), ∨ (inyectiva, "más pequeña") – caracterizaciones de los completados asociados (7-8). ⊗-normas para espacios de dimensión finita – simetrías y orden entre normas (8-10). Extensión de ⊗-normas a espacios de dimensión infinita – aproximación a través de subespacios de dimensión finita – extensión por continuidad – normas accesibles (vía duales y finitud) (10-11). Formas bilineales y aplicaciones asociadas a una ⊗-norma (11-12). Formas y aplicaciones nucleares (13-15). Comparación de ⊗-normas: módulo accesibilidad, "todos" se sumergen en el "mismo" (15) (*fina dialéctica platónica Otro/Mismo*) – dominancia y equivalencia entre normas (15) – relación entre casos real y complejo (16). §2 (16-32) "LAS ⊗-NORMAS LIGADAS A LOS ESPACIOS C Y L". Complementos sobre ∧, ∨ – representaciones integrales – representaciones por medio de factorizaciones canónicas – productos tensoriales con parámetros sobre L_1 y C_0 (16-18). Espacios de tipo C y de tipo L – estructura vectorial-topológica – prolongaciones (desde subespacios), relevos (desde cocientes) (18-21). ⊗-normas inyectivas y proyectivas – caso de ∨ (inyectiva), ∧ (proyectiva) – *pasos sistemáticos generales de la obstrucción al tránsito* (21-23). Formación de nuevas ⊗-normas – *plasticidad notacional y terminológica* (simetrías y dualidad) *ligada a suavidad estructural* (isometrías y factorizaciones) – red de productos tensoriales con tipos C, L y espacios generales a la luz de la red de nuevas normas (23-27). Red de 6 normas derivadas: /∧ , ∧\ , /∧\ , ∨/ , \∨, \∨/ (27-28). "Tablero de las ⊗-normas naturales" – 4 nuevas normas – *arquetipos* cociente y subespacio – normas naturales (clausura de ∨ bajo duales, transpuestas y diagonal) – 2 normas naturales adicionales ("hilbertianas") – **Tablero general de las 14 (clases de) normas naturales** (reticulado y propiedades de factorización) – *metodología explicativa* (designaciones simbólicas, simetrías transpuesta y dual, implicaciones de dominación, reducción del número de normas en los casos C, L o H) (28-32). §3 (32-45) "LAS ⊗-NORMAS LIGADAS AL ESPACIO DE HILBERT". 2 normas "hilbertianas" H, H' (buen comportamiento sobre bilineales de productos de Banach en espacios de Hilbert) – comparaciones con /∧\ , \∨/ (32-33). Formas hermitianas asociadas a H (34-36) y H' (36-38) – representaciones vía L^2 (37). Relaciones elementales entre H y H' (38), y relaciones con "pesos" integrales (39-41) – factorizaciones canónicas (38-42). "Clases naturales de operaciones lineales en espacios de Hilbert" – **Caracterización de espacios de Hilbert como L-subespacios y C-cocientes (*)** – red de diversos enunciados equivalentes a (*) por medio de comparaciones entre normas (42-45). §4 (45-59) "LAS RELACIONES ENTRE LOS DOS GRUPOS DE ⊗-NORMAS". Funciones de tipo α (enlaces tensoriales L^1, $L\infty$) (45-47). "Teorema fundamental de la teoría métrica de los productos tensoriales": **Desigualdad de Grothendieck** (47-50) y demostración (aproximación finitaria y cálculo geométrico natural) (50-52). Consecuencias para la teoría de operadores lineales – "mejoría de operadores por composición" – caracterización vectorial-topológica de (*) (52-55). Aplicaciones al análisis armónico (55-58). "Preguntas abiertas": problema de aproximación (accesibilidad / accesibilidad métrica de espacios de Banach) "parece improbable" (58) [en efecto, Enflo 1972]) – "mejores constantes" (58) y distinción casos complejo/real – "equivalencias de interés", "recíprocas diversas" (59) – comparaciones de normas proyectiva e inyectiva a través de sucesiones de operadores (59) – "estudio de la estructura vectorial-métrica fina de los espacios de Banach generales" (59). "OBSERVACIONES" (61-63). Algunos resultados debidos a Schatten "reencontrados independientemente por el autor" (61). "Dificultades esenciales" ligadas a accesibilidad (61). Método de hipótesis generales y "numerosas consecuencias" (61). Existencia de una infinitud continua de ⊗-normas no equivalentes (62). Resultado de Takeda "obtenido simultáneamente por el autor" (63). Características similares a la de la Tesis Doctoral: escritura *à la* Bourbaki, habilidad inventiva del lenguaje (red de definiciones apropiadas, red notacional y terminológica), esclarecimiento de situaciones generales y posteriores aplicaciones, discriminación exacta (descenso) de equivalencias, suficiencias y necesidades entre los conceptos introducidos, entendimiento en la pluralidad (red de normas) y construcción de acotaciones (tipos en la *Desigualdad de Grothendieck*) a partir de una constante universal (arquetipo K_G).

Los números de páginas remiten a la transcripción del *Résumé* disponible vía www.ime.usp.br
Visita de Grothendieck a Brasil (otoño 1952 - fines 1954) descrita en [Azevedo 2008]
Visiones matemáticas del *Résumé* en [Diestel, Fourie, Swart 2008], [Pisier 2011]

tres normas tensoriales fundamentales (arquetipo)

catorce normas tensoriales naturales (tipos)

RETICULADO DE NORMAS TENSORIALES

Desigualdad de Grothendieck

relación profunda entre normas tensoriales para operadores sobre L_2 (tipo Hilbert), L_1 L_∞ (tipo Banach)

$$\exists K\ \forall T \in L_\infty \otimes L_\infty\ ||T||_\wedge \le K\,||T||_H$$

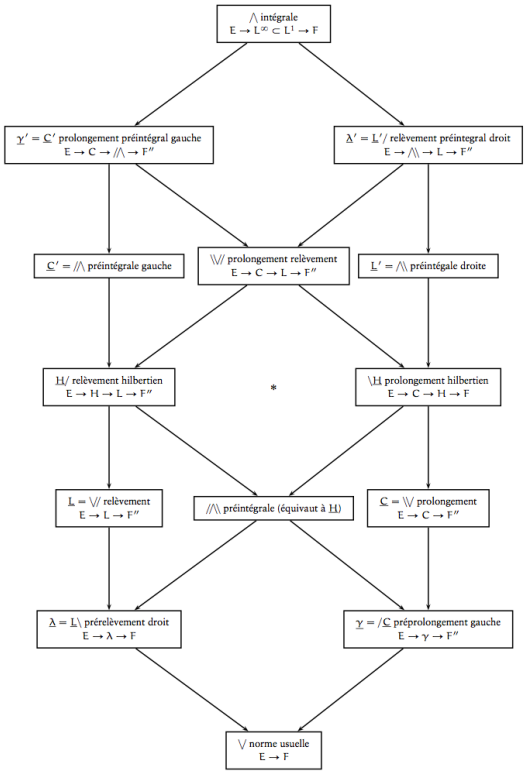
si K es óptima (=K_G), lo poco que se sabe es:

$1 < K_G$ (complejos) $< K_G$ (reales) ≤ 1.782

[Pisier 2011]

arquetipo profundo y desconocido

TABLEAU DES ⊗-NORMES NATURELLES



BIBLIOGRAPHIE D'ALEXANDER GROTHENDIECK

[1] *Sur la complétion du dual d'un espace vectoriel localement convexe.* C. R. Acad. Sc. Paris **230**, 605–606 (1950).

[2] *Quelques résultats relatifs à la dualité dans les espaces* ($\mathcal{F}$). C. R. Acad. Sci. Paris **230**, 1561–1563 (1950).

[3] *Critères généraux de compacité dans les espaces vectoriels localement convexes. Pathologie des espaces* ($\mathcal{LF}$). C. R. Acad. Sci. Paris **231**, 940–941 (1950).

[4] *Quelques résultats sur les espaces vectoriels topologiques.* C. R. Acad. Sci. Paris **233**, 839–841 (1951).

[5] *Sur une notion de produit tensoriel topologique d'espaces vectoriels topologiques, et une classe remarquable d'espaces vectoriels liée à cette notion.* C. R. Acad. Sci. Paris **233**, 1556–1558 (1951).

[6] *Critères de compacité dans les espaces fonctionnels généraux.* Amer. J. Math. **74**, 168–186 (1952).

[7] *Sur les applications linéaires faiblement compactes d'espaces du type* $C(K)$. Canadian J. Math. **5**, 129–173 (1953).

[8] *Sur les espaces de solutions d'une classe générale d'équations aux dérivées partielles.* J. Analyse Math. **2**, 243–280 (1953).

[9] *Sur certains espaces de fonctions holomorphes, I.* J. reine angew. Math. **192**, 35–64 (1953).

[10] *Sur certains espaces de fonctions holomorphes, II.* J. reine angew. Math. **192**, 77–95 (1953).

[11] *Quelques points de la théorie des produits tensoriels topologiques.* Segundo symposium sobre algunos problemas matemáticos que se están estudiando en Latino América, Julio 1954, 173–177. Centro de Cooperación Científica de la UNESCO para América Latina, Montevideo, Uruguay, 1954.

[12] *Espaces vectoriels topologiques.* Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Universidade de São Paulo, 1954.

[13] *Résumé des résultats essentiels dans la théorie des produits tensoriels topologiques et des espaces nucléaires.* Ann. Inst. Fourier **4**, 73–112 (1952).

[14] *Sur certains sous-espaces vectoriels de* L^p. Canadian J. Math. **6**, 158–160 (1954).

[15] *Résultats nouveaux dans la théorie des opérations linéaires, I.* C. R. Acad. Sci. Paris **239**, 577–579 (1954).

[16] *Résultats nouveaux dans la théorie des opérations linéaires, II.* C. R. Acad. Sc. Paris 239, 607–609 (1954).

[17] *Sur les espaces* ($\mathcal{F}$) *et* ($\mathcal{DF}$). Summa Brazil. Math. **3**, 57–123 (1954).

[18] *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires.* Mem. Amer. Math. Soc. n° 16, 1955.

[19] *Une caractérisation vectorielle-métrique des espaces* L^1. Canad. J. Math. **7**, 552–561 (1955).

[20] *A general theory of fibre spaces with structure sheaf.* University of Kansas, 1955.

[21] Erratum au mémoire: *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires.* Ann. Inst. Fourier **6**, 117–120 (1955-56).

[22] *Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques.* Bol. Soc. Mat. São Paulo **8**, 1–79 (1956).

[23] *Théorèmes de finitude pour la cohomologie des faisceaux.* Bull. Soc. Math. France **84**, 1–7 (1956).

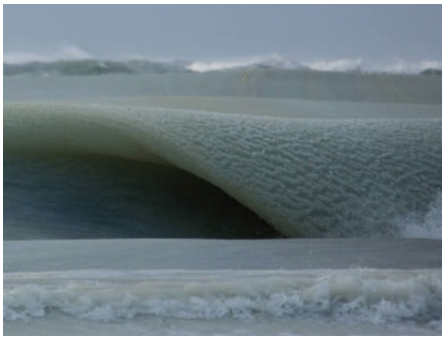
[24] *La théorie de Fredholm.* Bull. Soc. Math. France **84**, 319–384 (1956).

[25] *Sur la classification des fibrés holomorphes sur la sphère de Riemann.* Amer. J. Math. **79**, 121–138 (1957).

[26] *Sur certaines classes de suites dans les espaces de Banach, et le théorème de Dvoretzky-Rogers.* Bol. Soc. Mat. São Paulo **8**, 81–110, (1956).

[27] *Un résultat sur le dual d'une* C^**-algèbre.* J. Math. Pures Appl., **36**, 97–108 (1957).

[28] *Sur quelques points d'algèbre homologique.* Tôhoku Math. J. **9**, 119–221 (1957).



Marzo 11

El tránsito del análisis a la geometría
Hacia las categorías abelianas y Riemann-Roch

MULTIPLICIDAD

metodológica	*matemática*
necesidad de trabajar en múltiples campos a la vez (proyectividad)	categorías implícitas por doquier en la Tesis Doctoral y en el *Résumé*

El año 1955 marca un giro crucial en mi trabajo matemático: el paso del "análisis" a la "geometría". Recuerdo aún esa impresión fuerte, como si abandonara estepas áridas y ariscas, para encontrarme de pronto en una suerte de "país prometido" con lujuriantes riquezas, multiplicándose al infinito (...) Hay una cosa en matemáticas que (desde siempre sin duda) me fascina más que cualquier otra, no es ni el "número", ni la "magnitud", sino siempre la *forma*. Y entre los mil y un rostros que escoge la forma para revelársenos, el que me ha fascinado más y el que me sigue fascinando, es la *estructura* escondida en las cosas matemáticas. [RS01, pp. 26-27]

*EVT, productos tensoriales topológicos, espacios nucleares: suavidad/naturalidad **impuesta** por Grothendieck (invención)*

*Categorías, Riemann-Roch, geometría algebraica: suavidad/naturalidad **propia** del campo en cuestión (descubrimiento)*

LUGAR DE SERRE



1955

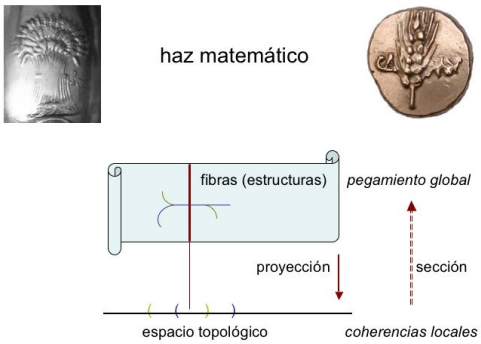
Papel de detonador (...) en la génesis de las principales ideas-fuerza y de las grandes tareas que desarrollé entre 1955 y 1970 (...)
Todo lo que aprendí en geometría, lo aprendí de Serre, cuando no lo aprendí yo mismo en mi trabajo (...)
Durante años fue mi *solo* interlocutor (...)
Era tan seductor que no resistía a sus encantos (...)
La historia de mi relación con Serre no es otra cosa que la historia de mis intereses matemáticos, de 1952 a 1970 (...)



1961 (con Serre)

[RS3, pp. 555-556]

HACES



Abril 8
Categorías abelianas

1955-56 Elaboración del trabajo: Kansas 1955 - París 1956 (ver correspondencia Grothendieck-Serre, SMF 2001)

1957 **[1957] "Sur quelques points d'algèbre homologique"**
Tôhoku Math. J. 9 (1957): 119-221 (Tannaka, editor).



[1957]

Sur quelques points d'algèbre homologique

(**en negritas**, los aportes originales mayores de Grothendieck)

"INTRODUCCIÓN" (119-122). "Recibido Marzo 1 1957" – "Lo esencial de los capítulos I, II, IV y una parte del capítulo III ha sido desarrollado en la primavera 1955, en ocasión de un Seminario de Álgebra Homológica en la Universidad de Kansas" (119). *"Contenido del trabajo"*: "Este trabajo tiene su origen en un intento de explotar la analogía formal entre la teoría de la cohomología de un espacio con coeficientes en un haz y la teoría de los funtores derivados de funtores de módulos, para encontrar un cuadro común que permita englobar estas teorías y otras" (119). *Cap. I*: *(i)* estructura: existencia de suficientes inyectivos o proyectivos gracias a "criterios dúctiles" ligados a sumas y productos infinitos; *(ii)* lenguaje: categorías aditivas y abelianas (119). *Cap. II*: "formalismo homológico en categorías abelianas", resoluciones, sucesiones espectrales (119). *Cap. III*: "redesarrollo" de la cohomología a coeficientes en un haz, "suavización" con respecto a Cartan y Serre ("sin casi hipótesis restrictivas sobre la naturaleza de los espacios"), aplicabilidad a los espacios no separados de la geometría algebraica abstracta o la "geometría aritmética"; "conversaciones preciosas" con Godement y Cartan (119-120). *Cap. IV*: "pregunta no clásica" de Ext de haces de módulos, enlace de Ext globales y locales (120). *Cap. V*: estudio de acciones de grupo adicionales sobre el espacio, el haz de anillos sobre el espacio y un segundo haz de módulos sobre el primer haz; "forma definitiva" de homología tipo Cech, gracias a nuevos funtores de cohomología, implícitos en casos anteriores (120). *"Aplicaciones"*: "por falta de espacio, solo pude dar muy pocas aplicaciones". Otras más: *(a)* **dualidad de Grothendieck**, extiende teoremas de Serre (FAC); *(b)* extensión (a variedades algebraicas completas) de resultados de Serre sobre variedades proyectivas; *(c)* "intermediación natural" de resultados de Steenrod (potencias reducidas y simétricas) en haces (120). *"Lagunas"*: "silencié las estructuras multiplicativas" de las cuales "no parece haber aún una teoría satisfactoria, con el grado de generalidad y sencillez necesaria" (nota a pie de página: Cartier acaba de encontrar esa "formulación satisfactoria general") (120). "Expreso mis agradecimientos a los señores Godement, Cartan y Serre, cuyo interés ha sido el estímulo indispensable para la redacción del trabajo" (121). *Tabla de contenidos* (121-122).

"CAPÍTULO I. GENERALIDADES SOBRE LAS CATEGORÍAS ABELIANAS" (122-139). *"I.1. Categorías".* Categoría (**conjuntos** Hom), categoría dual, epis y monos (vía conjuntos Hom), isos, **subobjetos** ("sous-trucs"), objetos cociente ("trucs quotient"), (representación de) productos directos (escogencia vía símbolo τ de Hilbert), categorías con productos y con **productos infinitos**, (representación de) sumas directas (escogencia vía símbolo τ de Hilbert) (122-124). *"I.2. Funtores".* Funtores covariantes y contravariantes, morfismos funtoriales (= transformaciones naturales), **equivalencia** de categorías (en realidad, define una **adjunción** [observación posterior de Marquis], que luego se subespecializa en equivalencia), distinción de equivalencia e isomorfismo (124-125). *"I.3. Categorías aditivas".* Categoría **aditiva** (los Hom son grupos abelianos, existen sumas y productos finitos, existe un cero), núcleo, conúcleo, imagen (126). *"I.4. Categorías abelianas".* Categoría aditiva con axiomas suplementarios AB1 (existencia de núcleo y conúcleo para todo morfismo), AB2 (*Coim(u) →Im(u)* es iso para todo morfismo *u*); ejemplos de **categorías aditivas no abelianas** (módulos topológicos separados, grupos abelianos filtrados, espacios fibrados holomorfos sobre superficies de Riemann); **retículos** de subobjetos y objetos cociente; sucesiones exactas y funtores exactos (127-128). *"I.5. Sumas y productos infinitos".* Axiomas adicionales "en orden de fuerza creciente": **AB3** (existencia de sumas directas arbitrarias), **AB4** (AB3 + suma arbitraria de monos es mono), **AB5** (AB3 + ley de distribución localica para subobjetos), **AB6** (AB3 + extensión arbitraria de distribución AB5, "no se usará en el trabajo"); ejemplos de **categorías abelianas que distinguen los axiomas infinitarios** (grupos abelianos, grupos topológicos abelianos compactos, **HACES DE GRUPOS ABELIANOS SOBRE UN ESPACIO TOPOLÓGICO**); "axiomas sobre todo útiles para el estudio de límites inductivos y proyectivos" (128-130). *"I.6. Categorías de diagramas y propiedades de permanencia".* Esquemas (S), diagramas en una categoría (C), categoría de diagramas C(S), diagramas conmutativos (Σ), **categoría de diagramas conmutativos** C(Σ), propiedades de permanencia: C aditiva, con productos o sumas infinitas, satisface ABj 1≤j≤6, implica lo mismo para C(Σ); extensiones canónicas de funtores de C a C(Σ) (130-131). *"I.7. Ejemplos de categorías definidas por esquemas de diagramas".* Categoría trivial, categoría producto, categoría de funtores, categoría de complejos (homológicos), categoría de **acciones de grupo**, categoría de **representaciones de un anillo unitario**, sistemas inductivos y proyectivos, **prehaces** (131-133). *"I.8. Límites inductivos y proyectivos".* Definición de límites inductivos (escogencia canónica vía simbolo de Hilbert τ), **existencia de límites inductivos en categorías abelianas con AB3**, funtorialidad **exacta** de la construcción asumiendo además **AB5** (133-134). *"I.9. Generadores y cogeneradores".* Familia de generadores, **generador**, ejemplos (en módulos, haces, haces de haces), sistema de generadores provenientes de un esquema, **existencia de generador implica existencia de cogenerador** en categorías abelianas con **AB5** (ejemplo, toro como cogenerador de categoría de módulos) (134-135). *"I.10. Objetos inyectivos y proyectivos".* Definición de objeto inyectivo (vía exactitud del **funtor representable**); teorema principal: **EXISTENCIA DE SUFICIENTES INYECTIVOS EN CATEGORÍAS ABELIANAS CON AB5 Y CON UN GENERADOR**; prueba vía buena potenciación (deducida del generador), lema de Zorn, propiedades del maximal y recurrencia transfinita; caso de interés "no visible a un ojo desnudo": categorías de diagramas (135-137). *"I.11. Categorías cociente".* "Las consideraciones sistematizan y suavizan el «lenguaje módulo C» de Serre"; subcategorías completas ("complètes") y espesas ("épaisses"); **categorías cociente** e interés de propiedades de reflexión (137-139).

"CAPÍTULO II. ÁLGEBRA HOMOLÓGICA EN LAS CATEGORÍAS ABELIANAS" (139-153). "*2.1. ∂-funtores y ∂*-funtores".* ∂-funtores (y duales ∂*) (entre una categoría abeliana y una aditiva, formalización de la noción de borde); **funtores cohomológicos** como ∂-funtores exactos de grado infinito (y duales homológicos) (entre dos categorías abelianas) (139-140). *"2.2. ∂-funtores universales".* **∂-funtores universales** (proyectores de la cohomología, "arquetipos") y funtores satelitales ("tipos" medios); caracterización de los universales como borrables ("effaçables") ligados a resoluciones inyectivas; existencia de satelitales en categorías abelianas con condiciones de finitud (ejemplo: categoría abeliana de grupos algebraicos completos sobre característica 0), y, ortogonalmente, en categorías abelianas con sumas infinitas, buena potenciación y AB5 (140-143). *"2.3. Funtores derivados".* Funtores derivados, subobjetos de un inyectivo y resoluciones inyectivas (extensión de Cartan-Eilenberg a categorías abelianas); construcción universal de funtores cohomológicos a partir de propiedades de inyectividad y exactitud; obstrucción en el caso de proyectivos (categoría abeliana con suficientes inyectivos y no suficientes proyectivos: **haces de módulos sobre un haz de anillos** dado sobre un espacio topológico) (143-144). *"2.4. Sucesiones espectrales y funtores espectrales".* "Despejar los casos generales más útiles" detrás del Cartan-Eilenberg; categoría de objetos filtrados como ejemplo de **categoría aditiva no abeliana**; familia graduada asociada a un objeto filtrado, sucesión espectral, funtor espectral, sucesión espectral cohomológica, caso de la cohomología de un complejo; funtores espectrales derivados; relaciones diversas entre funtores derivados; **CONSTRUCCIÓN DE FUNTORES ESPECTRALES COHOMOLÓGICOS CON DERIVADOS FINALES DADOS, A PARTIR DE PROPIEDADES DE INYECTIVIDAD Y EXACTITUD** (144-148). *"2.5. Funtores resolventes".* Funtores resolventes y reconstrucciones cohomológicas vía resoluciones inyectivas; resolución de la identidad; **funtor representable** resolvente asociado a una resolución proyectiva; **cálculo de sucesiones espectrales mediante funtores resolventes** (mediaciones y diagramas generales) (149-153).

	"Capítulo III. Cohomología a coeficientes en un haz" (153-182). *"3.1. Generalidades sobre los haces".* Prehaces y haces a partir de abiertos; prehaces y haces de grupos, o a valores en una categoría arbitraria; categoría aditiva de prehaces o haces a valores en una categoría aditiva; **categoría abeliana de prehaces o haces de grupos abelianos**; funtor de hacificación; relaciones entre espacios fibrados ("espaces étalés") y (pre)haces; caracterización de haces: un prehaz es haz si y sólo si el homomorfismo natural entre el prehaz y su espacio fibrado natural es isomorfismo (se obtiene entonces una **equivalencia** entre la categoría de espacios fibrados y la categoría de haces); espacios fibrados de grupos: las leyes de grupo en cada fibra satisfacen una ley de continuidad natural; **haz de haz de módulos** (sobre un haz original O de anillos unitarios); **la categoría C^0 de esos haces de haces es aditiva, abeliana, satisface AB5 y AB3*, y admite un generador; C^0 posee suficientes inyectivos** (prueba nueva según Grothendieck, prueba clásica según Godement) (153-156). *"3.2. Definición de los $H^p(X,F)$".* Se trata de los funtores derivados (= satelitales) asociados a un haz F de grupos abelianos sobre un espacio topológico X; resultan ser **funtores cohomológicos**; cálculo eventual vía anulaciones de los $H^p(X,F)$ para $p>0$ (condiciones de "aciclicidad"); imagen inversa de haces; cohomología natural asociada a la imagen inversa (156-158). *"3.3. Criterios de aciclicidad".* "Desarrollos debidos a Godement"; condiciones de exactitud y cubrimiento para tener una clase de objetos inyectivos; validación de esas condiciones para clases de haces fofos ("flasques") y blandos ("mous"), y consecuencias de aciclicidad; resoluciones de la identidad (Godement, Cartan); "un ejemplo divertido": aciclicidad obtenida para un haz constante de grupos abelianos sobre un espacio irreducible (158-160). *"3.4. Aplicaciones a cuestiones de relevo del grupo estructural".* Enlace con trabajos de Serre en geometría algebraica y trabajos de Chevalley en variedades algebraicas (por venir: **esquemas**); combinación de geometría, aritmética, álgebra, variable compleja (por venir: **Riemann-Roch** generalizado); **construcción de un cobordismo funtorial entre los grupos de cohomología de haces**; comparación del estudio de $H^1(X,F)$ vía cohomología de Cech y vía el "**tratamiento axiomático de este trabajo**"; ejemplos con variedades holomorfas y fibrados holomorfos (160-166). *"3.5. La sucesión exacta relativa a un subespacio cerrado".* Caracterización de las cohomologías a coeficientes en funtores restringidos a cerrados y abiertos (166-167). *"3.6. Sobre la dimensión cohomológica de ciertos espacios".* Control estructural (vía **AB4** y **límites inductivos**) de los **funtores cohomológicos** definidos sobre categorías de haces de grupos abelianos (prueba utiliza aproximaciones finitarias); control estructural (vía **AB5** y **generadores**) de los **funtores derivados** definidos sobre categorías abelianas (prueba utiliza aproximaciones inyectivas); permutación de funtores cohomológicos y límites inductivos bajo condiciones adecuadas de finitud (compacidad local, espacio de Zariski = sucesión decreciente de cerrados es estacionaria); **dimensión combinatoria acotada implica dimensión cohomológica acotada para haces abelianos sobre espacios de Zariski** ("el tema generaliza un teorema anterior de Serre") (167-171). "*3.7. La sucesión espectral de Leray de una aplicación continua".* Imagen directa de un haz; propiedades del funtor imagen (ecuación universal, exactitud, preservación de inyectivos, etc.); **construcción natural de funtor cohomológico (sobre haces abelianos) asociado a una aplicación (imagen) continua** (171-174). *"3.8. Comparación con la cohomología de Cech".* Grupos de cohomología de Cech; *obstrucción*: no forman en general un funtor cohomológico sobre haces de grupos abelianos (ejemplo delicado de Grothendieck); *tránsito*: bajo condiciones adicionales (paracompacidad, siguiendo a Cartan) la sucesión espectral asegura isomorfismos entre las dos cohomologías (vía funtores derivados o vía Cech) (174-179). *"3.9. Criterios de aciclicidad por el método de recubrimientos".* Recubrimientos de un espacio y enlace entre grupos de cohomología locales y globales; aplicaciones a variedades de Stein (Cartan) y matrices holomorfas (179-181). *"3.10. Pasos al límite en cohomología de haces".* Con condiciones adecuadas sobre las categorías (**suficientes inyectivos**, **AB5**), los límites inductivos de funtores entre esas categorías permiten reconstruir los morfismos coborde; aplicación en el caso de grupos topológicos metrizables completos (181-182). **"Capítulo IV. Los Ext de haces de módulos"** (183-195). *"4.1. Los funtores Hom".* Funtores *Hom* locales (sobre vecindades) y puntuales (sobre puntos) y pasajes entre ellos mediante consideraciones de tipo finito (coherencia) (185-187). *"4.2. Los funtores Ext y la sucesión espectral fundamental".* Reconstrucción como funtores derivados y como prehaz abeliano, dicotomía local/global, **enlace mediante funtores representables y condiciones de coherencia**, aplicaciones a sucesiones espectrales y resoluciones canónicas (187-190). *"4.3. Caso de un haz de anillos constante".* Condiciones de exactitud (envío de inyectivos en inyectivos), existencia de funtores canónicos (cohomología espectral), resoluciones abelianas (191-193). *"4.4. Caso de haces con un grupo de operadores".* Aplicación de los resultados del capítulo al caso de la **categoría de acciones de grupo sobre haces** (193-195). **"Capítulo V. Estudio cohomológico de los espacios con operadores"** (195-220). *"5.1. Generalidades sobre los G-haces".* Categorías (aditivas) de G-haces de grupos, anillos, G-haces abelianos, etc. **Categoría abeliana de *G-O*-módulos** (sobre un G-haz de anillos O), satisface AB5, AB3* y posee un generador. Imágenes inversas y directas de G-haces. Ejemplos en el caso de variedades diferenciables u holomorfas (preludio intuitivo al **Riemann-Roch** generalizado, por venir) (195-199). *"5.2. Los funtores $H^n(X, G, A)$ y las sucesiones espectrales fundamentales".* "**Funtores cohomológicos universales**" (formados por grupos abelianos o haces), aplicaciones a construcción de sucesiones espectrales y resoluciones canónicas, casos particulares de aciclicidad. Ejemplo en el caso de un grupo de Galois de un recubrimiento y "mismos resultados en el caso de las variedades aritméticas" (intuición de los **esquemas**, por venir) (199-203). *"5.3. Caso de un grupo discontinuo de homeomorfismos".* Aplicaciones de resultados anteriores a condiciones sobre estabilizadores y (ausencia de) puntos fijos (203-205). *"5.4. Transformación de la primera sucesión espectral".* **Cálculos de sucesiones espectrales** y aplicaciones diversas a grupos finitos (205-207). *"5.5. Cálculo de los $H^n(X,G, A)$ mediante recubrimientos".* **Teoremas de representación locales y globales**, enlaces vía condiciones topológicas (paracompacidad, separación, etc.) (207-213). *"5.6. Los $Ext^n(X, A, B)$".* Fórmulas de enlace entre funtor de secciones y funtores representables en el caso de *G-O*-módulos; conexiones entre inyectivos, aciclicidad; construcción de sucesiones espectrales y resoluciones; isomorfismos entre funtores *Ext* y funtores derivados (213-219*). "5.7. Introducción de las familias Φ".* Fórmulas funtoriales extendidas, y aplicaciones a casos de grupos finitos o acciones triviales (219-220). Bibliografía (221): Atiyah, Borel, Buchsbaum, Cartan, Cartier, Chevalley, Eilenberg, Godement, Grothendieck, Hochschild, Mac Lane, Serre, Shapiro, Weil.
[2001] ***Correspondencia Grothendieck-Serre*** *(apuntes sobre el Tôhoku)*	(G →S, 25 Feb 1955) Analogía de teoría de funtores derivados y cohomología de espacios a coeficientes en un haz, sin saber aún "si marcha tan bien en el caso de un espacio no separado" (13-14). (S →G, 13 Feb 1955) "Tu artículo sobre el álgebra homológica fue leído con cuidado [en el Congreso Bourbaki] y convirtió a todo el mundo (aún a Dieudonné, ¡quien parece completamente funtorizado!)" (17); comparación con Buchsbaum y papel disruptor de Eilenberg (18-19). (G →S, 1 Sep 1956) "Pasé lo mejor del mes pasado en la redacción de mi *multiplodoco* de álgebra homológica (…) más de 100 páginas en gran formato"; incluye tabla de contenidos muy similar a la definitiva (43). (G →S, 19 Sep 1956) Dificultades de publicación en Estados Unidos y en Bourbaki (45). (G →S, 13 Nov 1956) Propuesta de publicación al *Tôhoku*, revista de Tannaka, donde "los artículos-río no les desaniman" (49).

Los números de páginas remiten al texto original [1957]
y a la correspondencia Grothendieck-Serre [2001]

ALGUNAS FUERZAS MAYORES EN EL *TÔHOKU*

---

(1) vaivenes entre lo uno y lo múltiple

NO: definir *un* objeto y explorar una estructura *externa* sobre el objeto
SÍ: definir la **categoría** de *todos* los objetos y explorar la estructura *interna* de la categoría

Cat – E general
Obj **+** E particular

NO: entender un objeto "en sí" (*uno*: objeto interno *X*)
SÍ: entender un objeto "en otro" (*múltiple*: **funtor representable** externo h_X)



---

(2) "cuadro común"



"analogía formal" entre
cohomología a coeficientes en un haz (herencia *riemanniana*)
serie de funtores derivados de funtores de módulos (herencia *galoisiana*)

enlaces naturales entre
geometría algebraica, topología, variable compleja, (co)homología

sustento: **teoría de haces**

---

(3) construcciones universales y nociones de equivalencia

	NO: (∃) ≈	**SÍ:** (∃!) ~
inversión "metafísica":	(tipos)	(arquetipos)
inversión metodológica:	(estática)	(dinámica)



el arquetipo (= ***arkhê***; *ark-* raíz griega; *arkeô* = alejar; *akhô* = fundar; *arkhên* = proyectar)
emerge a través de las *transformaciones* de los tipos y las *invarianzas* de las transformaciones
("lenguaje módulo C de Serre", **categorías cociente** y variación sobre la base según Grothendieck)

arquetipología general: esquemas horizontales (comando), verticales (corte), rítmicos (giro, ramificación, dilatación)
[*Les structures anthropologiques de l'imaginaire*, Durand 1960]

---

(4) manejos infinitarios (el "paraíso" cantoriano)



axiomas **AB3-AB6**: productos y límites inductivos arbitrarios
generador: *integración* interna (en *un* objeto) de la *diferenciación* externa (en *toda* la categoría)

fuerza arquetípica de **AB5 + generador**: existencia de suficientes inyectivos
fuerza arquetípica de **abelianidad + inyectividad**: construcción de funtores cohomológicos y derivados

---

ALGUNAS CITAS SOBRE LA INFLUENCIA DEL *TÔHOKU*

"Los primeros artículos sobre categorías no tuvieron secuelas inmediatas, puesto que en ese periodo proveyeron solo un lenguaje. La noción de teoría de categorías como un tema propio de estudio aparece solo en la tercera fase del movimiento del álgebra abstracta, es decir, el periodo 1957-1974, bajo la influencia de Grothendieck." [MacLane 1981]

"El *Tôhoku* demostró que las categorías podían ser un instrumento para realmente *hacer* matemáticas, y desde allí en adelante el desarrollo fue rápido." [Barr & Wells 1985]

"Después de la creación de la noción moderna de espacio topológico y el descubrimiento de los procesos básicos de límites en la teoría de la medida, el siguiente conglomerado mayor de nuevas y sorprendentes construcciones infinitarias fue introducido por Alexander Grothendieck con su tratamiento del álgebra homológica, categorías derivadas y funtores, topos y sitios." [Manin 1998]

"Se reconoce el toque del Maestro en la idea de que el problema no es cómo definir un motivo: el problema es definir la categoría de los motivos, y desenterrar las estructuras que lleva la categoría." [Deligne 1998]

Abril 15
Riemann-Roch y K-teoría

Registro parcial de intereses:

- 1951: *Tribu* No. 25 (exposición de Grothendieck para Seminario Bourbaki: Riemann-Roch según Kodaira)
- 1955-57: *Correspondencia Grothendieck-Serre* (ver resumen abajo)
- 1955-56: *Tôhoku* (pistas indicadas en sesión previa de este Seminario)
- 1957: *Séminaire Cartan* (exposición de Grothendieck, "Sur les faisceaux algébriques et les faisceaux analytiques cohérents")

1957 **[1957] "Classes de faisceaux et théorème de Riemann-Roch" (Rapport Riemann-Roch, RRR)**
(Noviembre 1 1957), reproducido en: *SGA6*, pp. 20-77.

1958 **[1958] Armand Borel & Jean-Pierre Serre,**
"**Le théorème de Riemann-Roch (d'après des résultats inédits de A. Grothendieck)**",
Bulletin de la Société Mathématique de France 86 (1958): 97-136.

[1957] ***RRR***	*"Cap. I. λ-anillos (preliminares formales)". "1. Definiciones".* Anillos con operadores homomórficos en series formales (21-23). *"2. Ejemplos". K(G,k)* para *G* grupo, *k* anillo conmutativo; casos de grupos algebraicos, topológicos, de Lie, formas cuadráticas, etc. ("Prometemos no necesitar todos esos ejemplos para tratar el teorema de Riemann-Roch!"); determinaciones específicas con condiciones adicionales sobre *G*; *K(X)* para *X* variedad algebraica (24-28). *"3. El "λ-anillo definido por un anillo graduado".* Construcción formal y funtorial de un homomorfismo de Chern, que da lugar a las clases de Chern (28-33). *"4. Las operaciones $\lambda^p(N,x)$".* Ecuaciones relativas, características (Euler-Poincaré), alternadas (Riemann-Roch), en el caso abstracto de anillos de series formales y polinomios universales (33-38). *"Cap. II. Clases de haces algebraicos coherentes y clases de Chern". "1. La teoría de Chow".* "Fijaremos un cuerpo de base *k* que supondremos algebraicamente cerrado. Un gran fragmento de lo que sigue, y tal vez todo, es sin embargo válido sin esa restricción" (38); anillo de Chow *A(X)* (anillo graduado de clases de ciclos sobre una variedad *X* con buenas propiedades); *matemática relativa*: *A* como funtor contravariante; ecuación relativa; teoría Chow de clases de Chern (38-42). *"2. Definición de clases de Chern de haces algebraicos coherentes".* Definición de *K(C)* para *C* subclase de una categoría abeliana; *matemática relativa*: construcción de funtores cohomológicos entre los *K(C)* gracias a resoluciones inyectivas; aplicación al caso de haces coherentes (42-47). *"3. Generalidades funtoriales sobre K(X)".* Definición de multiplicación gracias a alternación de los Tor; propiedades homomórficas y funtoriales; ecuación relativa (47-54). *"4. Algunos resultados técnicos".* Propiedades funtoriales para filtraciones; descomposición celular (generación del grupo *K*) (54-63). *"5. Definición hacificada de clases de Chern. Aplicación al estudio de morfismos inyectivos".* Ecuaciones relativas para el caso inyectivo; observaciones sobre limitantes, extensiones y modificaciones de la prueba (demostración "situada" en un espacio, aunque "ciertamente verdadera" en general, 68) (63-68) *"6. El teorema de Riemann-Roch".* Prueba en característica 0, ampliada a toda característica (ver añadido); referencias: Hirzebruch, Serre, Grothendieck (69-71) *Añadido. "Demostración del teorema de Riemann-Roch (Grothendieck, Noviembre 1 1957)"* (71-76). Prueba en característica arbitraria, "basada sobre un principio diferente" (69). "Notamos *K(X)* el grupo abeliano generado por las clases de haces coherentes sobre *X* (módulo la identificación de una extensión a una suma); la suma alternada de los *Tor* hace de *K(X)* un anillo" (71). "Notamos *A(X)* el anillo graduado de las clases de ciclos de *X* (para la equivalencia racional, *cf.* Chow)" (72). Clases de Chern (ch) y de Todd (T) (elementos en $A(X)\otimes Q$) (72). *Matemática relativa*: dado un morfismo propio $f : Y \to X$, construcción de homomorfismos naturales f_* : $A(Y)\to A(X)$, $f_!$: $K(Y)\to K(X)$ (72). "Teorema de Riemann-Roch" (RR): en condiciones adecuadas, $f_*(ch(y)T(Y))=ch(f_!(y))T(X)$ para $y\in K(Y)$ (73). Condiciones de permanencia / reducibilidad para RR (73). Con un "cálculo estándar" y con "cálculos elementales" se concluye la prueba (74-76).
[1958] ***Le théorème de Riemann-Roch***	"Lo que sigue constituye las notas de un Seminario llevado a cabo en Princeton, en el otoño de 1957, sobre los trabajos de Grothendieck; los resultados nuevos que figuran se le deben a este último; nuestra contribución atañe únicamente a la redacción. El «teorema de Riemann-Roch» del que se trata es válido para variedades algebraicas (no singulares) sobre un cuerpo de característica arbitraria; en el caso clásico, donde el cuerpo de base es **C**, el teorema incluye como caso particular aquel demostrado hace unos años por Hirzebruch" (97). Generalidades sobre haces, haces coherentes y aplicaciones propias (98-102). *Matemática relativa*: imágenes de haces, referencias al *Tôhoku*, propiedades de permanencia de haces coherentes (102-104). **Grupo *K(X)* de clases de haces sobre una variedad algebraica *X*** – Presentación de *K(X)* a través del grupo $K_1(X)$ de fibrados, vía resoluciones y diagramas conmutativos largos (105-108). Operaciones sobre *K(X)*: *interior*: anillo conmutativo; *exterior*: potencia; *matemática relativa*: imágenes directa e inversa (ojo, p. 110: *ecuación relativa*: propiedad estructural de un conectivo intuicionista a la Peirce-Caicedo) (108-111). "El hecho de que $K(X) = K_1(X)$ permite extender la definición de clases de Chern a haces coherentes arbitrarios" – "En el caso de un cuerpo de base arbitrario, Grothendieck (...) reemplaza *H*(X)* por el anillo graduado *A(X)* de las clases de ciclos sobre *X*, bajo equivalencia lineal a la Chow" (111). **Ecuación relativa** para anillos *A(X)* – Clases de Todd – Clase exponencial de Chern – Ecuaciones relativas para clases de Todd y de Chern (112). "Enunciado del teorema de Riemann-Roch": diagrama no conmutativo (obstrucción) entre clases de Chern (para imágenes inversas asociadas a un morfismo propio entre "buenas" variedades) y **diagrama conmutativo (tránsito) entre clases de Chern "desviadas" por clases de Todd** (113) – "El teorema R-R bajo la forma Grothendieck implica la fórmula R-R-Hirzebruch" – "La demostración se hará por reducción a los casos particulares de una **proyección** y una **inyección**" (113). Lemas de reducción: "caso de la inyección (...) más difícil" (113-115). Propiedades de exactitud y homotopía para *K(X)* (115-118). **Demostración R-R para el caso proyectivo**: comportamiento funtorial de *K* con respecto a productos tensoriales, fórmula de Hirzebruch válida para espacios proyectivos (118-119). **Demostración R-R para el caso inyectivo**: resoluciones locales de haces (120-124), fórmula de Hirzebruch para el caso inyectivo (124), pruebas locales (125) y "explosión" global (125-128), lemas de translación (128, 129-135), "fin de la prueba de R-R" (129). "Manuscrito recibido el 9 Mayo 1958" (136).
[2001] ***Correspondencia Grothendieck-Serre*** *(apuntes sobre Riemann-Roch)*	(G→S, 18 Feb 1955) Intuición de cómo ciertos espacios universales y clasificadores podrían jugar un "papel en un Riemann-Roch algebraico, similar al que me has vagamente explicado y que funciona en el caso complejo (debido a Hirzebruch)" (5). (G→S, 1 Nov 1957) "En anexo una demostración muy simple de Riemann-Roch, independiente de la característica" – "Te señalo que «moralmente» el nuevo método descansa sobre la determinación de *K(X)* y *A(X)*" – enfatizando así la emergencia del grupo *K(X)*, fundamento de la K-teoría (57). (G→S, 12 Nov 1957) "De acuerdo con todas tus rectificaciones" – "Con la definición de clases de Chern para haces (...) el teorema de Riemann-Roch puede también enunciarse en el caso de variedades no proyectivas (lo que sucederá en el caso clásico, gracias a la definición trascendente de las clases de Chern)" (59).

Los números de páginas remiten al texto de Grothendieck [1957], al artículo Borel-Serre [1958] y a la correspondencia Grothendieck-Serre [2001]

RIEMANN-ROCH CLÁSICO

Teoría de las funciones abelianas [Riemann 1857, sección V]
Apelación "Riemann-Roch" dada al teorema en [Brill & Noether 1874]

idea básica
conjugación armónica de lo UNO (geométrico) y lo MÚLTIPLE (algebraico)

el estudio de *una* función se determina por el estudio de una *multiplicidad* de funciones *sobre la superficie de Riemann* de la función original

función f holomorfa
→ **superficie de Riemann** S asociada (asuma compacidad)
→ sistema de puntos P_i sobre S afectados con multiplicidades m_i, $m=\sum m_i$
→ **espacio vectorial** H de funciones holomorfas con m ceros asignados sobre S
→ espacio vectorial M de funciones meromorfas con m polos asignados sobre S

$$\underset{\text{invariante geométrico}}{m - género(f) + 1} = \underset{\text{armonía algebraica}}{dim\,(M) - dim(H)}$$

RIEMANN-ROCH-SERRE

haz Θ de (gérmenes de) funciones meromorfas con polos asignados
→ grupos de cohomología $H^0(\Theta)$, $H^1(\Theta)$ (espacios vectoriales complejos finito-dimensionales)
haz Ω de (gérmenes de) funciones holomorfas con polos asignados
→ teorema de **dualidad** de Serre: $H^1(\Theta) \approx (H^0(\Omega))^*$

$$\underset{\text{invariante geométrico}}{m - género(f) + 1} = dim\,(H^0(\Theta)) - dim(H^1(\Theta)) = \underset{\text{equilibrio cohomológico}}{dim\,(H^0(\Theta)) - dim(H^0(\Omega))}$$

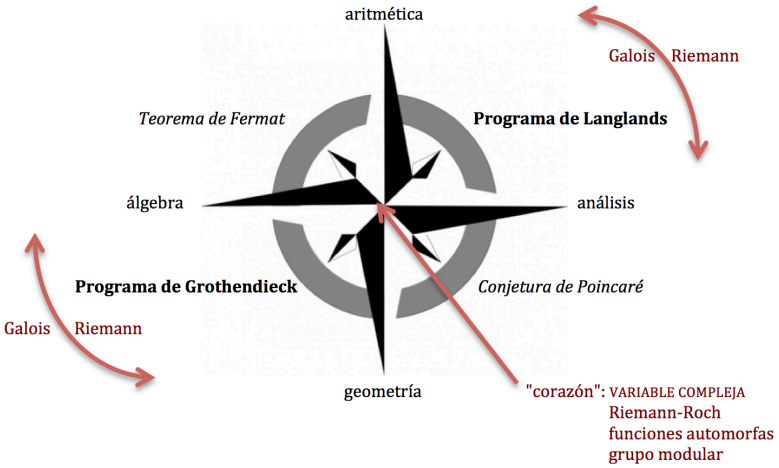
RIEMANN-ROCH-HIRZEBRUCH

en variedad fija X con "buenas" propiedades,
enlace entre clases de Chern (invariantes "aditivos" exponenciales en $H^*(X)$),
clases de Todd (invariantes "multiplicativos" polinomiales en $H^*(X)$)
y sumas alternadas de dimensiones cohomológicas

RIEMANN-ROCH-GROTHENDIECK

- **linealización** profunda: emergencia de la **K-teoría**: grupo $K(X)$, anillo $A(X)$
- **naturalización** de clases de Chern y de Todd como transformaciones entre K y H^*
- **relativización** de Serre-Hirzebruch al caso de un morfismo $f: X \to Y$ (variación)

ROSA MATEMÁTICA DE LOS VIENTOS



Mayo 13
Espacios de funciones holomorfas

[1953] "Sur certains espaces de fonctions holomorphes" (I, II), *J. reine angew. Math.* 192 (1953): 35-64 & 77-95.
[recibido 7 Noviembre 1951]

[1957] "Sur la classification des fibrés holomorphes sur la sphère de Riemann", *Amer. J. Math.* 79 (1957): 121-138.
[recibido 12 Octubre 1956; "la mayoría del trabajo se realizó en 1955, mientras el autor era Visiting Associate Professor en la Universidad de Kansas" (121)]

[1961] ***Techniques de construction en géométrie analytique (I-X)***, *Séminaire Cartan*, Año 13 (1960-61), exps. 7-17.

[1953]	Esquema del artículo en tres partes: (*Ia*) funciones holomorfas a valores en un evtlc (§§2-3); (*Ib*) espacios de funciones holomorfas sobre la esfera de Riemann, representaciones integrales de aplicaciones lineales acotadas, teorema de estructura para *todas* las aplicaciones lineales continuas en un evtlc completo, estudio de una "vasta clase de ecuaciones elípticas sobre una variedad, gracias al formalismo de los núcleos-distribuciones introducido por L. Schwartz" (36) (§§4-6); (*II*) "estudio topológico de espacios de funciones holomorfas – la parte sin duda más original e importante" (36), "los métodos empleados son susceptibles de generalidad" (36), propiedades topológicas intrínsecas ligadas a espacios nucleares (§7), propiedades topológicas "elementales" ligadas a localidad (§8). [Los espacios de funciones holomorfas aparecen como ejemplo crucial de **espacios nucleares**, paralelamente (en su concepción, 1951) a las primeras notas breves sobre productos tensoriales topológicos y criterios de compacidad en espacios funcionales generales (1950-1952)]
[1957]	*Par. 1.* Teorema general *("Lie"zación*). Reducción del grupo estructural de un fibrado holomorfo sobre la esfera de Riemann *S* (teorema 1.1, 122). *Par. 2.* Teorema particular (*Linealización*). Descomposición directa, en fibras de dimensión 1, de un fibrado vectorial holomorfo sobre *S* (teorema 2.1, 126). *Par. 3.* Teorema dual (*Estructuración*). Un fibrado vectorial holomorfo sobre *S* posee una estructura ortogonal ssi es isomorfo a su fibrado dual (teorema 3.2, 131). *Par. 4.* Demostración del teorema principal (Par. 1). Conjetura: "Parece plausible que la única variedad proyectiva *X* sobre la cual todo fibrado vectorial holomorfo pueda descomponerse en suma de fibrados holomorfos de fibra **C**, sea la esfera de Riemann" (136). Marco de la escuela francesa (referencias: Cartan, Cartier, Chevalley, Grothendieck, Serre, Weil), particularmente FAC + GAGA (Serre). [Ejemplo importante de enlaces Riemann (fibraciones holomorfas, esfera) / Galois (descomposición), y cercanía (en su concepción, 1955) con trabajos paralelos sobre **Riemann-Roch**]
[1961] ***Techniques de construction en géométrie analytique***	"I. Descripción axiomática del espacio de Teichmüller y de sus variantes" (7-1 / 7-33; 19 Diciembre 1960 y 9 Enero 1961). "II. Generalidades sobre espacios anillados y espacios analíticos" (9-1 / 9-14; 16 Enero 1961). "III. Productos fibrados de espacios analíticos" (10-1 / 10-11; 23 Enero 1961). "IV. Formalismo general de los funtores representables" (11-1 / 11-28; 30 Enero 1961). "V. Fibrados vectoriales, fibrados proyectivos, fibrados en bandera" (12-1 / 12-15; 6 Febrero 1961). "VI. Estudio local de morfismos: gérmenes de espacios analíticos, platitud, morfismos simples" (13-1 / 13-13; 20 y 27 Febrero 1961). "VII. Estudio local de morfismos: elementos de cálculo infinitesimal" (14-1 / 14-27; 6 y 20 Marzo 1961). "VIII. Reporte sobre los teoremas de finitud de Grauert y Remmert" (15-1 / 15-10; 10 Abril 1961). "IX. Algunos problemas de módulos" (16-1 / 16-20; 17 y 24 abril 1961). "X. Construcción del espacio de Teichmüller" (17-1 / 17-20; 8 Mayo 1961). *Ejemplo de estrategia conceptual.* El objetivo consiste en construir un espacio analítico de representación universal ("espacio de Teichmüller") que clasifique a todas las demás curvas algebraicas sobre los espacios analíticos (7-8). Grothendieck procede a describir axiomáticamente las propiedades funtoriales (7-6) que debe verificar ese espacio, y condiciona teoremáticamente su existencia (global) a la existencia de una jerarquía escalonada (local) de adecuados funtores fibrantes ("funtores de Jacobi") que permitan controlar el número de automorfismos de las estructuras en juego (funtores rígidos) (7-32). A su vez, la explicitación de estas condiciones técnicas se consigue por medio de recubrimientos y acciones de grupo (7-18 / 7-21), cambios de base (7-2) y operaciones libres sobre los mismos funtores rígidos (7-27). Nos encontramos así ante una verdadera matemática en movimiento, una *matemática relativa* que, no obstante, permite encontrar ciertos invariantes universales ("espacio de Teichmüller") *debido a la variación misma* de los objetos matemáticos locales, a lo largo de una fina jerarquía de mediaciones que da lugar al objeto matemático global. [Se trata de un volumen entero de Grothendieck sobre **variable compleja** (!), desaprovechado y poco conocido hasta el momento. Deberá realizarse en el futuro un estudio mucho más profundo de estas exposiciones realizadas en el Seminario Cartan]

Los números remiten a *páginas* en los artículos de Grothendieck [1953], [1957] y a *secciones-páginas* en el conjunto de exposiciones [1961]

ALGUNAS ESTRATEGIAS EN LAS EXPOSICIONES DEL SEMINARIO CARTAN [1961]

- despejar ("dégager") un *mecanismo funtorial* general para el manejo de módulos, aplicado en particular al caso de la variable compleja
- despejar una "buena formulación" de problemas de módulos en el marco de los espacios analíticos
- enlazar propiedades de *proyectividad* con teoremas de existencia en ese marco (*espacio de Teichmüller*)
- acercar el marco de los esquemas (geometría algebraica) y el marco de las variedades holomorfas (geometría analítica), aprovechando en particular, en ambos casos, las propiedades cruciales de ciertos *elementos nilpotentes en anillos locales*.

ENCARNACIÓN –EN LO CONCRETO– DE LOS MÉTODOS GENÉRICOS DE GROTHENDIECK

- procesos de *ascenso* (funtorialidad general, problemáticas en la abstracción, marcos globales) y de *descenso* (proyectividad, módulos complejos, anillos locales, nilpotencia),
- *dialéctica de lo uno y lo múltiple* (acercamiento de marcos, funtorialidad específica de módulos, enlaces entre proyectividad y existencia)
- *estructuración jerárquica del saber matemático en niveles circulatorios*, donde se combinan la rica multiplicidad conceptual de cada objeto (o morfismo), la colección de funtores que permite medir la multiplicidad diferencial en cada nivel, y la colección de transformaciones (naturales) que permite reintegrar las marcas diferenciales encontradas.

MOMENTO NUCLEAR ESENCIAL

INICIOS AÑO 1955 - UNIVERSIDAD DE KANSAS
(DESPUÉS DE LA "CRISIS BRASILEÑA" DE 1954)

EL "GIRO HACIA LA GEOMETRÍA" PRODUCE EN POCOS MESES

FIBRADOS HOLOMORFOS SOBRE LA ESFERA DE RIEMANN
RIEMANN-ROCH GENERALIZADO (K-TEORÍA)
CATEGORÍAS ABELIANAS

Mayo 20

La Llave (= Clave) de los Sueños

[1987] *La Clef des Songes ou Dialogue avec le Bon Dieu*
[manuscrito, no publicado]

I. TODOS LOS SUEÑOS SON CREACIÓN DEL SOÑADOR (1-46) (§§1-16: el sueño y el conocimiento de sí mismo, descubrimiento del Soñador, la niñez, los sueños proceden del Soñador, instantes de verdad, la llave del gran sueño, la voz de la razón y la otra voz, actos de conocimiento y actos de fe, la voluntad de conocimiento, la chispa y la llama, trabajo y concepción, el ritmo de la creación, cuatro tiempos para un ritmo, ciclos de Eros, emoción y pensamiento).
II. DIOS ES EL SOÑADOR (47-79) (§§17-26: Dios es el Soñador, el conocimiento perdido, la increíble Buena Nueva, hermanos en el hambre, encuentro con el Soñador, preguntas prohibidas, reencuentro con Dios, solo existe un Soñador, el Creador y la Tela, Dios no se define ni se prueba, una nueva tabla de multiplicación).
III. EL VIAJE A MEMPHIS (1): EL ERRAR (80-136) (§§27-36: mis padres, esplendor de Dios, Rudi, cascada de maravillas, Dios por sana razón, reencuentros perdidos, el llamado, el giro, fe y misión, muerte, Dios habla en voz baja).
IV. ASPECTOS DE UNA MISIÓN (1): UN CANTO DE LIBERTAD (137-182) (§§37-46: impensable convergencia, el testimonio como llamado al descubrimiento de sí mismo, Eros o la potencia, el Ojo o el sentido, la visión, visión novadora como testimonio, alma y labor, el hombre como creador, creación y represión, libertad creadora y obra interior).
V. ASPECTOS DE UNA MISIÓN (2): EL CONOCIMIENTO ESPIRITUAL (183-268) (§§47-56: conocimiento inclusivo, belleza y contemplación, dolor y sombras, el alma de las cosas y el hombre sin alma, la mentalidad del rebaño, el uso de los Tiempos, creación y voz interior, creación y escucha, el árbol del bien y del mal, espritualidad arcaica, ley, ignorancia, verdad y creación, resistencia y sufrimiento).
VI. EL VIAJE A MEMPHIS (2): SIEMBRAS PARA UNA MISIÓN (269-315) (§§57-66: el acto, separación, comienzo sin fin, esperanza, Tempestad, el hombre nuevo, superficie y profundidad, el llamado del silencio, el mensajero, travesía del desierto y revelación, siembras y cosechas, tareas y gestación).

ALGUNOS TEMAS ESCOGIDOS (PARTE I).

LOS SUEÑOS Y EL SOÑADOR. Primer sueño profundamente transformador: "reencuentro con mi «*alma*»", "diez años atrás" (escrito el 30 abril 1987) (1). "La historia de mi madurez hacia un conocimiento de mí mismo (...) se confunde con la historia de mi experiencia del sueño" (2). Sueño como "testigo *directo*, *fiel* y de finura incomparable" de la "vida profunda de la psiquis", "cuadro trazado por la mano de un maestro" (2-3). "Viaje al descubrimiento del *Soñador* (...) del Pintor (...) del *Ojo* (...) de la *Mano*" (4). "Entendí poco a poco que es Él quien crea cada uno de nuestros sueños (...) aparecemos como «soñadores», en realidad «soñados»" (4). "Fue en agosto 1982, seis años después de mi primer trabajo sobre el sueño, que tuvo lugar un segundo gran giro en mi relación con los sueños y el Soñador (...) comprendí que *todos* salen de la misma Mano" (6). "He anotado cerca de un millar de sueños, de los cuales he sabido agarrar el mensaje en trescientos o cuatrocientos" (6). "En todos sin excepción, a través de su prodigiosa diversidad, siento un mismo «toque», percibo un mismo *soplo*, que no tiene nada mecánico y que no viene de mí" (7). "Especie de durmiente, ¡despiértate!" (7). "Como un seno materno, el «gran sueño» nos presenta una leche tupida y sabrosa, buena para nutrir y vivificar el alma" (9). "Me obstinaba, cada vez, a volver a escribir, sentado en mi cama (...) hasta dos horas seguidas" (10). "El Soñador era un poco como un *hermano* mayor, travieso y benévolo, sin la menor complacencia pero al mismo tiempo de una inagotable paciencia" (18). Las "dos llaves" del gran sueño (hambre espiritual / acto de fe) son "indistinguibles" y conforman un "*acto completo*" – enlace creador de *yin* y *yang* (19). "Para todos los sueños mensajeros que me llegaron y que he sondado, necesité horas, y a veces días de trabajo, para agarrar el mensaje" (24). "La *emoción* (...) es el alma misma y el soplo del sueño" (43). Descripción de la primera gran revelación (mediados de octubre 1976) (44-46).

EL INTELECTO Y EL ESPÍRITU / LA RAZÓN Y LA FE. "El *alma* estaba hambrienta" (5). "La realidad espiritual es otra cosa (...) mis ojos solo comienzan ahora a abrirse a esa realidad" (5). "Con un retroceso de diez años, veo ahora claramente que esa «otra voz» es la que me aguijonea siempre hacia lo *esencial*, mientras que la voz «de la razón», del gran sentido común, intenta desviarme en todas las formas" (11). "Solo un *acto de fe* torna «eficaz» y actuante el acto de conocimiento", como la mano torna eficaz al escalpelo (14). "La fe en mis sueños, o por decirlo mejor, la fe en el Soñador, se ha decantado como la quintaesencia misma de la fe en lo que hay de mejor en mí – lo que me hace capaz de conocer, de amar, de crear con la mano, el espíritu y el corazón" (19). "En el par fe–conocimiento, la fe juega el papel *yang*, y «fecunda» el conocimiento, que juega el papel *yin*" (20). La llave (espíritu/fe) se introduce en la cerradura, pero la mano y el trabajo (intelecto/razón) abren la puerta – la "*chispa*" y el "fuego" desarrollan la obra (23). Lugar del trabajo ("*organización*", "*orden*", "*dinamización*", "*profundización*", "*penetración*" – "de la periferia hacia las profundidades"): buscar "la metamorfosis de una imagen amorfa en una viva realidad interior", donde se revela su "«evidencia», su viva sencillez" (25). Aspectos *yang* (más intelectual) y *yin* (más espiritual) del trabajo (26-28).

LA ESCUCHA Y LA VISIÓN. Años (1977-1987) de "superación de «*umbrales*» (...) de escucha intensa" (1). Dificultad de acceder a manifestaciones "ocultas" en las "capas profundas de la psiquis" (2). "Somos ciegos (...) pero hay en nosotros un *Ojo* que ve y una *Mano* que pinta" (3). Al entrar a una realidad espiritual, "los ojos terminarán por abrirse y podrán ver" (5). "La «otra voz» es la *misma* que te habla en el sueño, es la del Soñador, la de la Madre, te murmura muy bajo *dónde* se encuentra la leche verdadera, a la que aspira no tu superficie, sino tu profundidad" (12). "Cuando, bajo la impresión aún del sueño recién realizado, sabes escuchar la voz humilde del hambre, entonces, sin saberlo, estás girando una llave delicada y segura" (13). El *habla* (de alguien, de los sueños) como "*conocimiento*" (13). "Un estado de apertura, de rigor o de *verdad*" sirve de preludio a "un acto de percepción esencialmente espiritual, en cuyo instante el ojo espiritual en nosotros, que percibe y distingue lo verdadero y lo falso, se abre o se entreabre, y *ve*" (14). "El estado de verdad parcial sería el estado de silencio interior y de escucha, que nos permite distinguir claramente la *Palabra* del ruido circundante" (15). "Por poco que tendamos la oreja, nosotros, músicos-cantantes, podemos captar al vuelo los fragmentos desperdigados de un esplendor que nos supera" (32). "El trabajo tiene como efecto «cambiar nuestro ojo»" (39).

LAS SOMBRAS. Reencuentro con el "Otro", el "niño en mí" (1). "La inercia del alma se dobla con un *miedo* incoercible, profundamente escondido (...) *miedo de conocer* (...) *gran miedo de cambiar*" (8). "Las cosas esenciales son también las más delicadas y las menos «seguras» de todas – como vapores impalpables" (11). "Estabas ante una puerta cerrada y ¡hela milagrosamente abierta! Estabas en la negrura o la penumbra y ¡he ahí una irrupción de luz!" (12). "De un magma informe nace de repente un *orden*" (13). "Prácticamente todos los procesos y actos creativos tienen lugar (salvo raras excepciones) en el Inconsciente, al abrigo de la mirada" (17). "El «más allá» del que nadie habla nunca (...) de cosas delicadas y elusivas, cosas de la sombra y de la penumbra (...) escapa a las manos burdas de la razón, y a su red, el lenguaje" (23). "Es el momento más obscuro, más ignorado (...) el que es también el más decisivo, el *momento creador* entre todos" (35). "Los procesos creativos se realizan en la sombra" (40) – "desde las alturas hacia las profundidades, de la superficie al corazón" (42).

LA ERÓTICA. La "otra voz" (Soñador, Madre, hambre, alma) es también "el hambre de Eros, de Eros-que-quiere-conocer" (12). "En 1977 (...) descubrí con sorpresa (...) que la pulsión de conocimiento en mi trabajo matemático era de la misma naturaleza que la pulsión amorosa. Las palabras y las imágenes que me llegaban espontáneamente, queriendo evocar la pulsión del descubrimiento en su esencia, eran las palabras e imágenes del amor carnal que me soplaba Eros" (29-30). "Distingo tres niveles o planos del conocimiento: «*sensual*» o «*carnal*» («*erótico*») (...) «*intelectual*» o «*artístico*» (...) «*espiritual*» de esencia superior (...) con correspondencias íntimas y misteriosas entre ellos" – "el sueño se me manifestó poco a poco, a lo largo de los años, como el «*Intérprete*» por excelencia, que nos señalaba cómo «remontar» de las palabras de la carne y de la inteligencia humana, hacia la realidad original" (30). "Dos ciclos de Eros: el juego y la labor" – "ciclos arquetípicos que cabalgan entre sí" (35-38)

LA CREATIVIDAD (1): RITMOS Y TIEMPOS. "Parecería que hay un *arquetipo* común a todos los procesos creativos, a todos los procesos de descubrimiento (...) «modelo» eterno (...) Dios, Creador" (31). "Discierno, en los procesos de descubrimiento (...) «cuatro tiempos» que marcan el ritmo de la creación, como flujos y reflujos de una respiración infinita, suerte de medidas en un contrapunto sin comienzo ni final: tiempo largo (preparación), tiempo corto (concepción – o activación), tiempo largo (trabajo), tiempo corto (consecución)" (31). Cuatro tiempos para un ritmo: "sueño", "despertar", "trabajo", "brecha" (32-34).

LA CREATIVIDAD (2): LIBERTAD Y VOZ INTERIOR. "Mientras se obedece a una falsa «razón», no hay ni acto creador, ni obra novadora" (12). "Pregunta delicada: en qué medida los procesos y actos creadores (y sobre todo los «actos de conocimiento») que se realizan en la psiquis, y particularmente en sus estratos profundos, son obra de la psiquis misma, o de Dios actuando en nosotros" – "dos de mis sueños me dicen claramente que hay una parte de creatividad proveniente de la psiquis misma" (16). "El espíritu entra y penetra" a través de "capas o estratos sucesivos (...) sonda laboriosamente (...) atraviesa (...) persigue sin descanso su tenaz progresión hasta al fin tocar el *fondo* (...) y en ese momento adquiere nacimiento la cosa nueva – la imagen viva, encarnación de un conocimiento nuevo y verdadero" (26).

Los números remiten a *páginas* en el manuscrito [1987]

UN ESQUEMA DE TENSIONES EN
LA LLAVE DE LOS SUEÑOS



(1988)

(UNO)

ARQUETIPO

SOÑADOR

MANO – OJO

ASCENSO A LA REVELACIÓN

MUSICALIDAD

PROYECTIVIDAD

TIPOS DEL EROS

MANOS
SENSUALIDAD - SENSIBILIDAD

MULTITUD SUEÑOS (millar)

TIPOS DEL INTELECTO

OJOS
LENGUAJE - RAZÓN
ARTE - CIENCIA

(MÚLTIPLE)

DESCENSO A LA DEVELACIÓN

TIPOS DEL ESPÍRITU

SOPLOS
FE - CO/RAZÓN

RITMOS DE LA CREACIÓN

ENTRONQUE *YANG - YIN*

MOMENTOS CREADORES

TRABAJO DE ESCUCHA

REMONTAR A LO PROFUNDO

CAPAS - ESTRATOS - UMBRALES

OBSCURIDADES - SOMBRAS

SEMINARIO CONTINUO DE FILOSOFÍA DE LAS MATEMÁTICAS
2015-I – GROTHENDIECK

Mayo 27
Diagramas de la creatividad en Grothendieck
Primer periodo (1950-1960)

---

(1) LA ARQUITECTÓNICA MATEMÁTICA

GERMINACIÓN
("COSECHAS")

1958
EL GIRO DEFINITIVO
(inicio de la Segunda Parte de este Seminario Grothendieck, 2015-II)
The cohomology theory of abstract algebraic varieties
(Conferencia Plenaria ICM, Edimburgo, 1958)
(B - C - G - K - L)

1957/1960
ALREDEDOR DE LA VARIABLE COMPLEJA
Técnicas de construcción en geometría analítica
Trabajos sobre fibraciones y espacios de holomorfas
(A - B - C - D - F - G - H - I)

1955
"EL GIRO HACIA LA GEOMETRÍA"
LOS SEGUNDOS MONUMENTOS MAYORES
Categorías abelianas (publ. 1957) (B - F - J - K - L)
K-teoría (publ. 1958) (B - C - G - J - K - L)

1953
LOS PRIMEROS MONUMENTOS MAYORES
Tesis Doctoral (publ. 1955) (A - C - D - E - H - J - K)
Résumé (publ. 1956) (A - C - D - E - F - J - K)

TOPOLOGÍA	ANÁLISIS FUNCIONAL	VARIABLE COMPLEJA	ÁLGEBRA
(A) evtlc	(D) espacios Hilbert/Banach	(G) Riemann-Roch clásico	(J) productos tensoriales
(B) haces	(E) espacios nucleares	(H) espacios de funciones holomorfas	(K) propiedades permanencia
(C) (no) separación	(F) aproximación	(I) esfera de Riemann	(L) co/homología

1950-1951
LOS GRANDES GÉRMENES
("SIEMBRAS")

CALIBRACIÓN DE FUERZAS
(# apariciones en los entornos de "germinación")

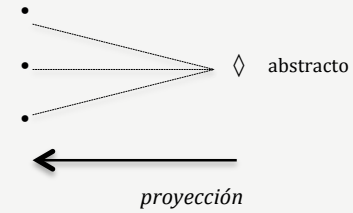
A (3)	D (3)	G (3)	J (4)
B (4)	E (2)	H (2)	**K (5)**
C (5)	F (3)	I (1)	L (3)

(2) LAS TENSIONES METODOLÓGICAS

DEL "EN SÍ" AL "EN OTRO" *inyección*

objeto particular	multiplicidad de objetos similares	categoría asociada
uno (nivel inferior)	*múltiple (nivel intermedio)*	*uno (nivel superior)*

DE LOS "TIPOS" AL "ARQUETIPO"



DE LO "ARTIFICIAL/SINGULAR" A LO "NATURAL/SUAVE"

las singularidades se suavizan en espacios generales
con equilibrios armónicos entre aritmética/álgebra/topología/análisis
(nuclearidad, holomorfía, hacificación, categorización)

DE LA "ESTRUCTURA" A LA "FORMA"

los objetos con *estructura externa* adicional
(aritmética, algebraica, topológica, analítica, etc.)
se subsumen en categorías cuya *forma interna* axiomática
se convierte en el objetivo esencial del conocimiento matemático

HACIA PROPIEDADES DE PERMANENCIA EN ENTORNOS NO SEPARADOS
(década 1960-1970)

espacio (geometría) : no enteramente determinado por puntos (separados)
emergencia de los TOPOS

tiempo (aritmética) : no enteramente determinado por enteros (separados)
emergencia de los ESQUEMAS

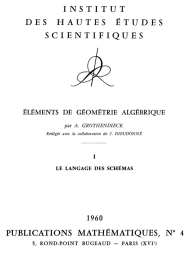
[todo esto se englobará en *Cosechas y Siembras* bajo la metáfora continua de la marea subiente]

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA – SEDE BOGOTÁ – DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

EPISTEMOLOGÍA E HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS
SEMINARIO CONTINUO DE FILOSOFÍA DE LAS MATEMÁTICAS
2015-II

GROTHENDIECK
(2ª PARTE – 2/3)







"La *nueva geometría* es ante todo una síntesis entre el mundo aritmético y el mundo de la magnitud continua – esos mundos, antes separados, conforman ahora solo uno" [Grothendieck, 1985]

1	*(10 ago)*	*Mapa del seminario: el "niño" (1928-1958) y el "mandarín" (1958-1970).*
2	*(12 ago)*	*La refundación de la geometría algebraica: grandes conceptos y problemas.*
3	*(19 & 24 ago)*	*1960: el entorno filosófico, técnico y biográfico.*
4	*(26 & 31 ago)*	*La Conferencia de Edimburgo (1958).*
5	*(2 & 7 sep)*	*EGA (I: visión general) (1960-1967).*
6	*(9 & 14 sep)*	*EGA (II: esquemas) (1960-1967).*
7	*(16 & 21 sep)*	*Cosechas y siembras (I: creatividad matemática) (1985-1986).*
8	*(28 oct)*	*SGA (I: visión general) (1960-1969).*
9	*(4 & 9 nov)*	*SGA (II: topos) (1960-1969).*
10	*(11 nov)*	*Cosechas y siembras (II: pragmática matemática) (1985-1986).*
11	*(18 & 23 nov)*	*Diagrama medio de la creatividad en Grothendieck (fin de la segunda parte).*

SALÓN 404-212	miércoles	lunes subsiguiente (cuando indicado)
14.00-16.00	presentación del coordinador	presentaciones de estudiantes y complementos

Prerrequisitos.
Pregrado de Matemáticas: madurez matemática, tipo *Grupos y Anillos*, *Topología* o equivalente. Posgrado de Matemáticas: abierto. Otras Carreras y Posgrados, acercarse a discutir la idoneidad (o no idoneidad) con el instructor.

Evaluación.
Cada estudiante inscrito al **curso** *Epistemología e historia de las matemáticas* deberá proponer, a mediados de semestre, el tema de un ensayo escrito (E), que desarrollará en la segunda mitad del semestre, y obtendrá también una nota de participación (P), asociada a las presentaciones complementarias de los días lunes (sesiones 3-7, 9, 11). La nota final del curso se obtendrá mediante la fórmula 0.3P + 0.7E.

Bibliografía.

Alexander Grothendieck, "The cohomology theory of abstract algebraic varieties", en: *Proceedings International Congress of Mathematics Edinburgh 1958*, Cambridge: Cambridge University Press, 1960, pp. 103-118.

Alexander Grothendieck, *Éléments de Géometrie Algébrique* (con Jean Dieudonné), IV volúmenes (8 partes), París: IHES, 1960-1967.

Alexander Grothendieck, *Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie*, VII volúmenes (12 partes), Berlín: Springer, 1970-1973 (fascículos originales multicopiados, 1960-1969).

Alexander Grothendieck, *Récoltes et Semailles* ("Cosechas y siembras"), manuscrito, 1252 pp., 1985-1986.

Fernando Zalamea - Oficina: 405-327 - Tel. (oficina): 3165000-13214
Mail: fernandozalamea@gmail.com - Web: www.docentes.unal.edu.co/fzalameat/

SEMINARIO CONTINUO DE FILOSOFÍA DE LAS MATEMÁTICAS
2015-II – GROTHENDIECK

Agosto 12
La refundación de la geometría algebraica:
grandes conceptos y problemas

EL PROBLEMA CENTRAL: LAS CONJETURAS DE WEIL
["Number of solutions of equations in finite fields", *Bulletin AMS* 55 (1949): 497-508]

conteo de número de puntos en variedades sobre campos finitos (Galois, **DISCR**)
mediante funciones generadores del tipo función Zeta (Riemann, **CONT**)

HERRAMIENTAS PARA LAS CONJETURAS (Weil)

(**DISCR**) variedades algebraicas abstractas — topología de Zariski (**CONT**)

Funciones Zeta → racionalidad (Dwork 1960)
ecuación funcional (Grothendieck 1966)
distribución de los ceros (Deligne 1974)

HERRAMIENTAS PARA LA SOLUCIÓN (Grothendieck)

(**DISCR**) **ESQUEMAS** — **TOPOS** (**CONT**)

NÚMERO — ESPACIO

nuevas ESTRUCTURAS

extensión de los
conceptos de número y espacio

clave
HACES

representaciones algebraicas
(espectro primo de un anillo)

representaciones topológicas
(cubrimiento categórico de un prehaz)

eliminación de unidades — eliminación de puntos

emergencia de FORMAS generales
(nuevas cohomologías en el tránsito **CONT** → **DISCR**)

SUAVIZACIÓN
NATURALIZACIÓN
NO SEPARACIÓN

nuevas FORMAS

profusión de cohomologías
(*étale*, *l*-ádica, cristalina, Hodge, de Rham, etc.)

"hay que escuchar la voz de las cosas"
tema y variaciones



MOTIVOS
comunes (**UNO**) detrás de la multiplicidad (**MULT**)

iteración y doble inversión (!)

(1) (Grothendieck – Fields 1966)
no estudiar UN motivo
sino CATEGORÍAS DE MOTIVOS
(estrategia de la marea subiente)

(2) (Voevodsky – Fields 2002)
no realizar cirugías algebraicas del espacio
(topología algebraica clásica)
sino CIRUGÍAS TOPOLÓGICAS DE UNA VARIEDAD ALGEBRAICA
(topologías finas de Grothendieck sobre sitios de esquemas)

tensión fundamental

étalé *versus* *étale*
(desplegado) (liso)

[toda la síntesis en una sola tilde]

Riemann Galois
CONT DISCR

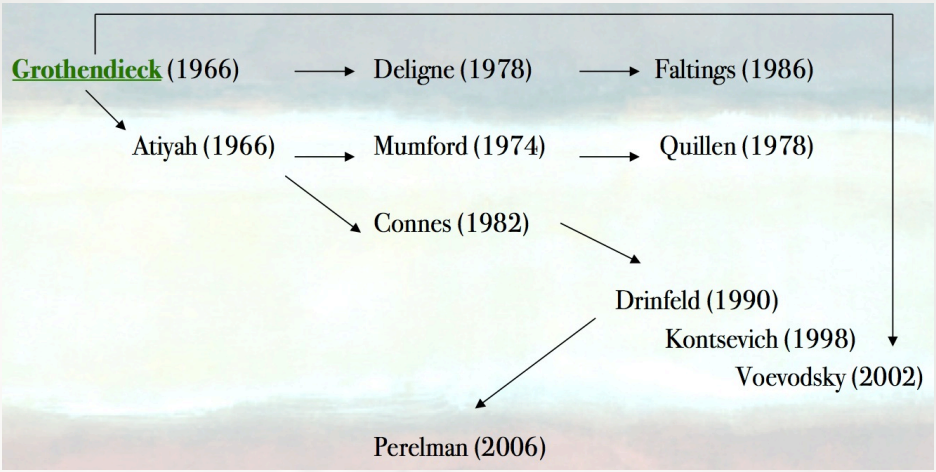
"La *nueva geometría* es ante todo una síntesis
entre el mundo aritmético y el mundo de la magnitud continua –
esos mundos, antes separados, conforman ahora solo uno"

Agosto 19

1960: entornos técnico, metodológico y biográfico

(A). ENTORNO TÉCNICO

EL PANORAMA FIELDS: LA HERENCIA DE GROTHENDIECK



(B). ENTORNO METODOLÓGICO

OBJETIVOS

SUAVIZACIÓN
NATURALIZACIÓN
NO-SEPARACIÓN

TÉCNICAS
RELATIVIZACIÓN / ABSTRACCIÓN
MULTIPLICACIÓN / UNIFICACIÓN

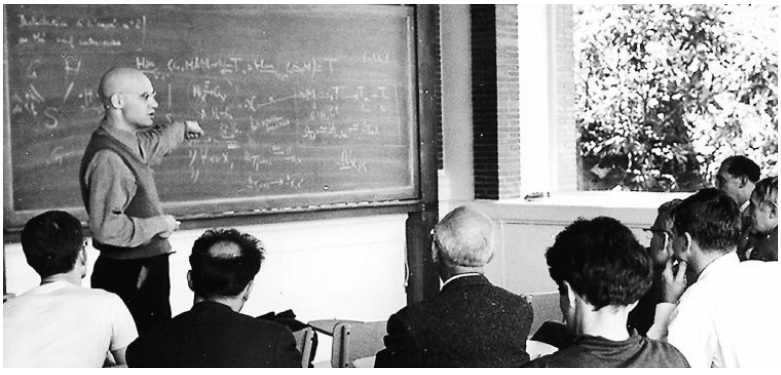
FUERZAS
YOGA: YIN / YANG
MÚSICA: VARIACIONES / TEMA
METAFÍSICA: TIPOS / ARQUETIPO

(C). ENTORNO BIOGRÁFICO (2ª parte: 1958-1970)

[referencias fundamentales: Scharlau, Schneps, Jackson]

1958	Plenaria (agosto) en el Congreso Internacional de Matemáticas	Visión nueva de la geometría algebraica **"The cohomology theory of abstract algebraic varieties"** [Edimburgo: Proc. ICM, 1958]
	Primera visita a Harvard (colegas Zariski, Tate; estudiante Mumford)	Fragmentos de fundación de la geometría algebraica *Fondements de la Géométrie Algébrique (FGA)* [París: Séminaire Bourbaki, 1957-1962]
1959	Junto con Dieudonné, es nombrado (marzo) profesor en el IHES	----------
1960-1969	Construcción de escuela en el IHES: • escritura con Dieudonné • cercanía con Serre • colaboración con Tate (Harvard), Artin (Harvard, MIT), Hartshorne (Harvard) • "alumnos" excepcionales: Giraud, Demazure, Verdier, Deligne, Illusie, etc. "No leemos libros, ¡los escribimos!"	Re-fundación arquitectónica de la geometría algebraica (I) ***Éléments de Géométrie Algébrique (EGA)*** (con Jean Dieudonné), IV volúmenes (8 partes) [París: IHES, 1960-1967] Re-fundación arquitectónica de la geometría algebraica (II) ***Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie (SGA)*** (con autores diversos), VII volúmenes (12 partes) [París: IHES, 1960-1969] (reeditados Springer 1970-1973)
1966	Medalla Fields (ICM Moscú – no la recibe, en protesta por abusos de derechos humanos)	
1967	Visita de Manin al IHES (inicio "motivos")	----------
1968	Abucheado y tratado de "mandarín" por los estudiantes en el Mayo 68	Visión nueva de la cohomología ("motivos") "Standard Conjectures on Algebraic Cycles" [Bombay: Tata Institute, 1968]
1970	Renuncia al IHES ("mandarinazgo", fondos militares, probable agotamiento) Hace público su abandono del mundo matemático en el ICM - Niza	





Agosto 26

La conferencia de Edimburgo

La "gran visión" de la refundación de la geometría algebraica

---

1958 **[1958]** "The cohomology theory of abstract algebraic varieties", *Proceedings International Congress of Mathematics (ICM) Edinburgh 1958*, Cambridge: Cambridge University Press, 1960, pp. 103-118.

contenido matemático	visión / metodología / filosofía
Influencia de Serre (FAC, 1955): "Esbozo breve de algunas ideas y resultados" que "inundarán" a la geometría algebraica "en los próximos años, desde los fundamentos hasta sus partes más avanzadas" (103). Tópicos centrales de la investigación cohomológica en geometría algebraica: *(I)* cohomología de Weil (103-104), *(II)* cohomología de haces algebraicos coherentes (104), *(III)* aplicaciones de la cohomología al álgebra local (104-105).	Marea subiente Cohomologías por doquier
Tema (I). Influencia de Weil (ICM, 1954): "Necesidad de una teoría de la cohomología para variedades algebraicas abstractas" (coeficientes suaves, en característica 0, y propiedades formales, tipo Lefschetz) para darle sentido preciso a las Conjeturas de Weil (103). Obstrucciones en el paso de car. *p* a car. 0 (programa de Serre): fallas con haces sobre la topología de Zariski (obstrucción en característica), fallas con haces de vectores de Witt (obstrucción en generación finita). Necesidad de grupos de cohomología "verdaderos" (103). "La cohomología de Weil debe ser definida por medio de una aproximación completamente diferente": "***conexiones entre cohomología de haces y cohomología de grupos de Galois, por un lado, y clasificación de cubrimientos no ramificados de una variedad, por otro lado***" (enlace entre Galois y Riemann, posteriormente denominado *étale*) (104). "No he iniciado estas investigaciones seriamente aún" (104).	Hacia cohomologías continuas, suaves, lisas ("étales": Victor Hugo)
Tema (II). "Riqueza de nuevos métodos y nuevas nociones", siguiendo a Serre. *(a)* Teoremas de finitud y comportamiento asintótico, *(b)* teoremas de dualidad y de residuos, *(c)* teoremas tipo **Riemann-Roch**, *(d)* resultados sobre variedades abelianas (104).	
Tema (III). "Métodos esencialmente debidos de nuevo a Serre". Caracterización de anillos locales regulares, teoría de intersecciones "realmente satisfactoria por su sencillez algebraica y su generalidad". **Teoría de dualidad local** (formas diferenciales y residuos en contextos algebraicos generales) (105). Pasos generales de lo local a lo global (105).	Dialécticas local-global
La continuación de la conferencia está dedicada a "dar algunas ideas principales sobre el segundo tema, es decir, la teoría cohomológica de los haces algebraicos coherentes" (105). "El espectro *natural* de las nociones y métodos usados en geometría algebraica *no* es realmente el de las variedades algebraicas" (!), sino el de los **esquemas** (105-106), donde se trabaja con enunciados sobre **anillos arbitrarios** (conmutativos con unidad; noetherianos si es el caso) (105). **Variación** de variedades (afines) sobre un anillo (106). Extensión: la **variación de variedades abstractas sobre un anillo** (característica arbitraria) da lugar a una correcta definición de esquemas (con **nilpotentes** admisibles, allende Nagata y Chevalley, base para un desarrollo eventual de un cálculo diferencial): *(i)* esquemas afines: haces de anillos locales sobre el espectro de ideales primos del anillo; *(ii)* esquemas generales (llamados "pre-esquemas"): haces topológicos localmente de tipo *(i)* ("el principio de la definición correcta se encuentra de nuevo en Serre") (106). Productos de esquemas y productos tensoriales de álgebras (107). Esquemas separados (llamados "esquemas") (107). Re-entendimiento de la geometría algebraica "usual" como el estudio de esquemas separados noetherianos con condiciones de tipo finito (107) – Las propiedades de variedades (e.g. variedad completa) se codifican en propiedades de morfismos entre esquemas (e.g. morfismo propio) (107). **Máxima suavidad** obtenida con respecto a las operaciones de la teoría de haces (107).	Paso de lo particular a lo general Paso de lo absoluto a lo relativo Nociones relativas de separación y generación finita Suavidad global (Yin)
(II-c). "El teorema de Riemann-Roch, demostrado independientemente por Washnitzer y por mí en geometría algebraica abstracta se expondrá por Hirzebruch en este congreso" (107-108).	
(II-a). "Resultados principales en la teoría cohomológica de morfismos de esquemas": cálculo específico de los grupos de cohomología "en el sentido general del álgebra cohomológica en las categorías abelianas" (108-110). Pruebas por reducciones sucesivas e inducciones decrecientes: interés y *necesidad* de los métodos cohomológicos (110). Riqueza de la **vía geométrica, natural y general** (111-112).	Naturalidad de la geometría
(II-b). "Teoremas de dualidad": extensiones de trabajos de Poincaré, Serre, Cohen-Macaulay (112-115).	Dialécticas álgebra-topología
"Problemas abiertos" (115-117): "es tal vez muy pronto, ya que las nuevas técnicas disponibles no se han ensayado aún con suficiente seriedad" (115). *Problema A* (Kodaira, homología trivial en el caso de ciertos espacios fibrados) (115-116). *Problema B* (funtores derivados triviales en el caso de ciertos morfismos propios) (116). "*Intuición heurística desde el punto de vista de los esquemas*" (116). *Problema C* (condiciones para reducciones puntuales de morfismos) (116). *Problema D* (propiedades de permanencia para esquemas de grupos) (116-117). *Problema E* (analogía, en esquemas, de variedades de Picard – "la vía más simple concebible de cambios de base" – apertura, vía nilpotentes, al desarrollo de una estructura infinitesimal, "ni siquiera obtenida aún en el caso clásico") (117).	Inventividad desde la abstracción
"El trabajo ha comenzado y será llevado a cabo en un tratado sobre Geometría Algebraica que, se espera, será escrito en los próximos años por J. Dieudonné y por mí, y que debe proveer un recuento sistemático de todas las preguntas mencionadas en esta charla" (117).	Disciplina y orden Visión arquitectónica (Yang)
Bibliografía (117-118): Auslander&Buchsbaum, Barsotti, **Borel&Serre**, Cartier (2), Chevalley&Cartan, Godement, **Grothendieck** (3), Nagata, Rosenlicht, **Serre (7)** (!), Tate, Washnitzer, **Weil** (2), Zariski (2).	

"Co/razón" de la Conferencia de Edimburgo

DISCR ---------- **CONT**

SERRE - CHEVALLEY - NAGATA (1955-56): introducción de "esquemas", *pegando* espacios afines

GROTHENDIECK (1958): generalización, *pegando* anillos locales sobre un anillo (conm) arbitrario A

ESQUEMAS
haces sobre la base $Spec(A)=\{P: P$ ideal primo en $A\}$ (topología de Zariski), fibras$=\{A_P = A(A\text{-}P)^{-1}$ anillos locales, $P \in Spec(A)\}$

variedades algebraicas sobre k (car. p) ⟷ grupos de cohomología con coeficientes sobre F (car. 0)

matemáticas relativas: comparación de esquemas

"Razón" de la Conferencia de Edimburgo

EL PROGRAMA 1958-1970

ESQUEMAS (HACES SOBRE ESPECTROS PRIMOS DE ANILLOS)
NÚMERO
[cómo acercarnos a una *categoría abeliana de haces numéricos* – obstrucción: condiciones de coherencia]

CATEGORÍAS ABELIANAS (HACES DE GRUPOS ABELIANOS)
TRÁNSITO

TOPOS (HACES SOBRE TOPOLOGÍAS DE GROTHENDIECK)
ESPACIO
[cómo acercarnos a una *categoría abeliana de haces espaciales* – obstrucción: subobjeto clasificador]

MOTIVOS (HACES SOBRE ----?----)
FORMA
[cómo acercarnos a una *categoría abeliana de haces formales* – obstrucción: conjeturas estándar]

Septiembre 2
Éléments de Géométrie Algébrique (EGA)
(I): Visión general

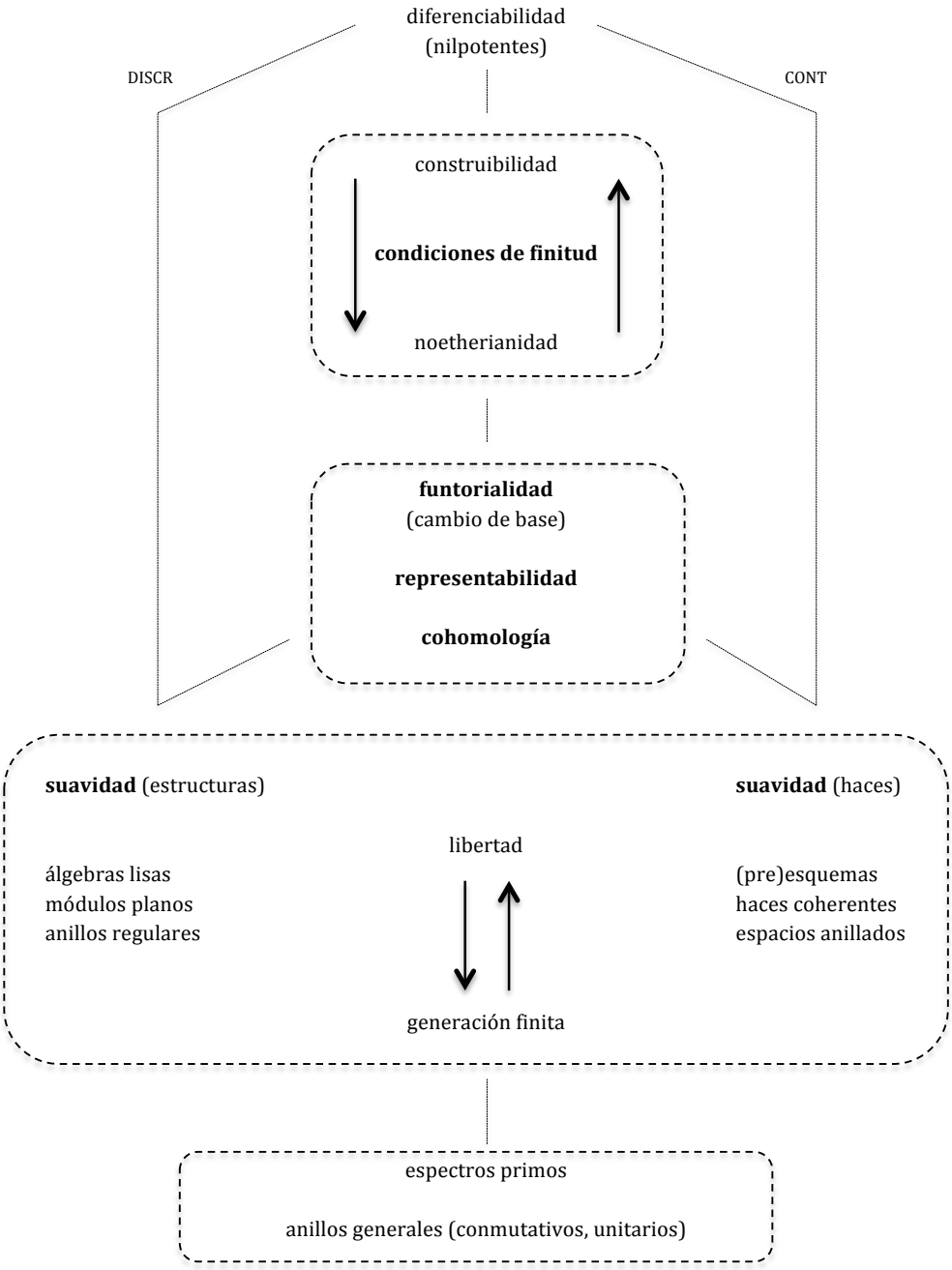
1960-66 **[1960-66]** (con J. Dieudonné), *Éléments de Géométrie Algébrique* (IV vols., 7 partes),
París: IHES, *Publications Mathématiques,* Nos. 4 (1960), 8 (1961), 11 (1961), 17 (1963), 20 (1964), 24 (1965), 28 (1966).
[Manuscritos realizados entre 1959 y 1964, publicados entre 1960 y 1966]

volumen (parte)	# pag.	finalización manuscrito (publicación)	título	contenidos (secciones principales)	visión/metodología/ filosofía
I	228	17 octubre 1959 (1960)	***El lenguaje de los esquemas***	Cap. 0 (*Preliminares*). Anillos, fracciones, haces, espacios anillados, haces coherentes, módulos planos, anillos ádicos. Cap. I. (*El lenguaje de los esquemas*). Esquemas afines, pre-esquemas, morfismos, productos, submersiones, reducciones, separación, condiciones de finitud, aplicaciones racionales, esquemas de Chevalley, cuasi-coherencia, esquemas formales.	Sumersiones en lo suave, plano, finitamente generado
II	222	22 julio 1960 (1961)	***Estudio global elemental de algunas clases de morfismos***	Cap. II. (*Estudio global elemental de algunas clases de morfismos*). Morfismos afines, espectros primos, espectro homogéneo de un haz de álgebras, fibrados proyectivos, jerarquía de morfismos (cuasi-afines, cuasi-proyectivos, propios, proyectivos, enteros, finitos), criterios de valuación, explosiones, proyecciones, clausuras.	Proyecciones desde lo primario, fibrado, hacificado
III (1)	167	28 junio 1961 (1961)	***Estudio cohomológico de los haces coherentes (1ª parte)***	Cap. 0 (*Preliminares*, sigue). Funtores representables, conjuntos construibles, módulos planos, álgebra homológica, cohomología de haces, límites proyectivos. Cap. III (*Estudio cohomológico de los haces coherentes*). Cohomología de esquemas afines, cohomología de morfismos proyectivos, morfismos propios (teorema de finitud, teorema fundamental), existencia para haces algebraicos coherentes.	Representabilidad y estructura de cohomologías
III (2)	91	15 diciembre 1962 (1963)	***Estudio cohomológico de los haces coherentes (2ª parte)***	Cap. III (*Estudio cohomológico de los haces coherentes*, sigue). Funtores Tor locales y globales, fórmula de Künneth, cambios de base en los funtores homológicos de módulos.	Enlace local-global, relatividad
IV (1)	259	15 marzo 1963 (1964)	***Estudio local de los esquemas y de los morfismos de esquemas (1ª parte)***	Cap. 0 (*Preliminares*, sigue). Topología combinatoria, anillos locales noetherianos, anillos regulares, extensiones de álgebras, álgebras lisas y anillos de Cohen, derivaciones y diferenciales, diferenciales en anillos de característica *p*, lisura formal, regularidad, anillos japoneses. Cap. IV (*Estudio local de los esquemas y de los morfismos de esquemas*). Condiciones de finitud relativas, conjuntos construibles en pre-esquemas.	Diferenciabilidad en anillos suaves (regularidad, lisura) Finitud y construibilidad
IV (2)	231	15 diciembre 1963 (1965)	***Estudio local de los esquemas y de los morfismos de esquemas (2ª parte)***	Cap. IV. (*Estudio local de los esquemas y de los morfismos de esquemas*, sigue). Cambio de base y módulos planos, ciclos primos y descomposiciones primarias, cambio de base en los pre-esquemas algebraicos, pre-esquemas localmente noetherianos (dimensión, profundidad, regularidad, morfismos planos), completados de anillos locales noetherianos, anillos excelentes.	Relatividad y completitud en ámbitos suaves, planos
IV (3)	255	15 noviembre 1964 (1966)	***Estudio local de los esquemas y de los morfismos de esquemas (3ª parte)***	Cap. IV. (*Estudio local de los esquemas y de los morfismos de esquemas*, sigue). Límites proyectivos de pre-esquemas, propiedades construibles, pre-esquemas de Jacobson, morfismos planos (topología, fibras), jerarquía de morfismos (equidimensionales, universalmente abiertos).	Estructura y construibilidad, topología de lo suave

ÉLÉMENTS DE GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

par A. GROTHENDIECK

Rédigés avec la collaboration de J. DIEUDONNÉ



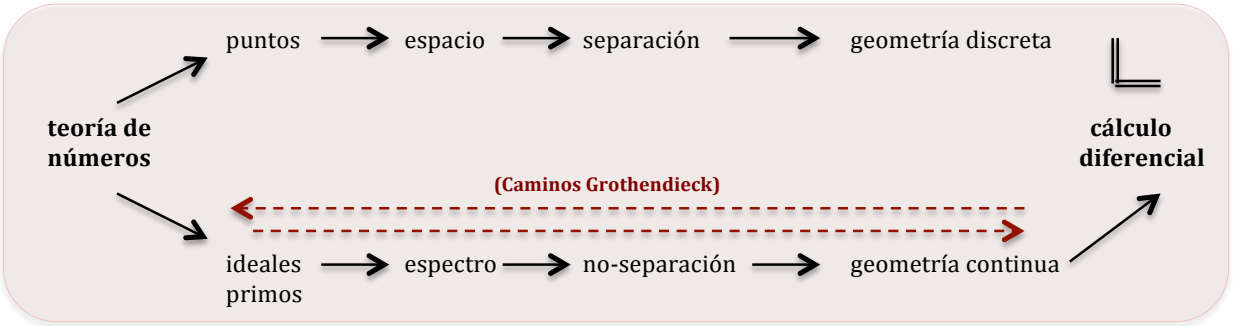
Septiembre 9
Éléments de Géométrie Algébrique (EGA)
(II): Perspectivas particulares

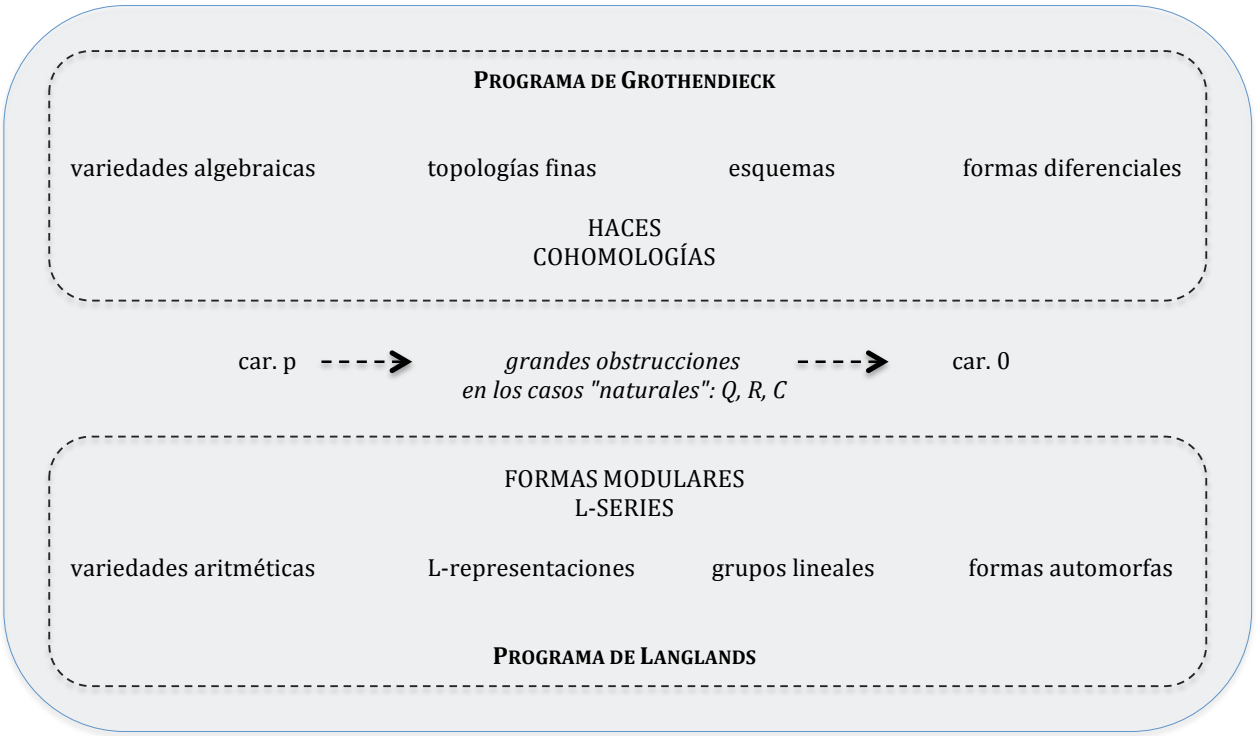
ÉLÉMENTS DE GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

par A. GROTHENDIECK

Rédigés avec la collaboration de J. DIEUDONNÉ

(A) Extensiones de la noción de número





(B) Algunas "suavizaciones" a lo largo de las dialécticas finito/infinito, discreto/continuo, aritmético/diferenciable

DOS DUALIDADES ESENCIALES
(lenguaje de teoría de categorías)

(variedades afines sobre k)
equivalente al dual de
(k-álgebras conmutativas
de tipo finito, sin nilpotentes)

(**esquemas afines**)
equivalente al dual de
(**anillos conmutativos**)

[**Riemann** → Dedekind → Hilbert → Chevalley → Serre → Cartier → Grothendieck]

PUNTO DE VISTA RELATIVO: dado un esquema S, estudio de la *categoría Esq/S* de morfismos $X \to S$.
CAMBIO DE BASE: estudio de $X \to S$, vía el cambio $S' \to S$, que da lugar (vía *productos*) a $X \times_S S' \to S'$.
REPRESENTABILIDAD: estudio de $X \to S$, vía estructura del *funtor representable* h_x: *Esq/S* → *Con*.

Dado $f: X \to S$, dado un punto s de S, sea $\chi(s) = \mathfrak{o}_s/\mathfrak{m}_s$
("cuerpo residual": cociente del anillo local por el único ideal maximal),
sea el cambio de base $\mathrm{Spec}(\chi(s)) \to S$;
entonces, la fibra $f^{-1}(s)$ es el espacio subyacente de $X_s = X \times_S \mathrm{Spec}(\chi(s))$.

En consecuencia, X puede verse como "parametrizado" por los X_s, y las preguntas
de "suavización" consisten en determinar f a partir de las propiedades de los X_s.

¿Qué tanto las "bases puntuales" $\mathrm{Spec}(\chi(s))$ determinan la "base general" S?
Los *límites* en la categoría *Esq/S* podrán resolver la cuestión.
Las propiedades de esquemas sobre extensiones arbitrarias se podrán reducir
a propiedades sobre extensiones de tipo finito,
y las propiedades de esquemas sobre anillos arbitrarios se podrán reducir
a propiedades sobre álgebras de tipo finito sobre **Z.**

[Kronecker → Grothendieck]

Morfismo *plano* ("platitude", Serre):
condición que evita variaciones bruscas de los X_s cuando s varía continuamente en S.

Morfismo *étale* (Grothendieck):
condición de control galoisiano sobre las fibras $f^{-1}(s)$:
deben estar constituidas por puntos aislados x
cuyos cuerpos residuales $\chi(x)$ son extensiones finitas, separables de $\chi(s)$.

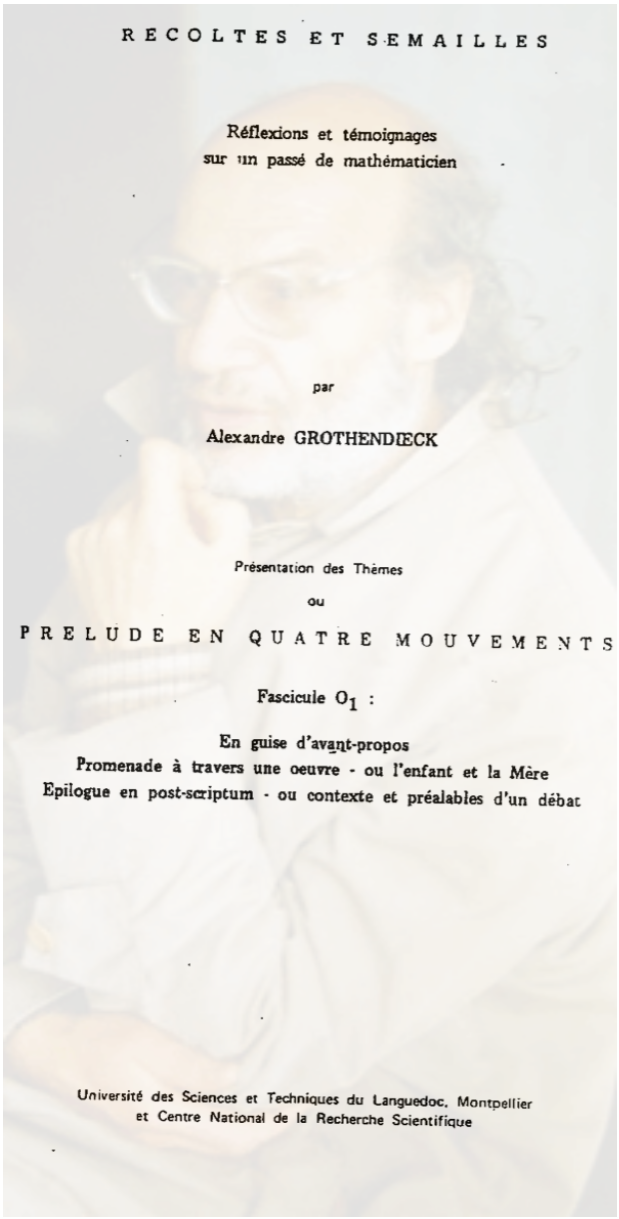
[**Galois** → Serre → Grothendieck]

Cubrimientos *étales*:
posibilidad de buena cohomología para resolución de las Conjeturas de Weil.

[guía recomendada: Jean Dieudonné, *Cours de géométrie algébrique. 1. Aperçu historique*, VIII. §§27-47]

Septiembre 16
Cosechas y siembras
(I): Esquema general – Preludio – Creatividad (1ª parte)

1986 **[1986]** *Récoltes et Sémailles*
Manuscrito inédito, Université de Montpellier & CNRS
1252 pp. [RS1-RS4] + c. 400 pp. introducciones [RS01-RS02] y apéndice [RSap]
Escritura intermitente entre Junio 1983 y Abril 1986.


RECOLTES ET SEMAILLES

Réflexions et témoignages
sur un passé de mathématicien

par

Alexandre GROTHENDIECK

Présentation des Thèmes
ou
PRELUDE EN QUATRE MOUVEMENTS

Fascicule O_1 :

En guise d'avant-propos
Promenade à travers une oeuvre - ou l'enfant et la Mère
Epilogue en post-scriptum - ou contexte et préalables d'un débat

Université des Sciences et Techniques du Languedoc, Montpellier
et Centre National de la Recherche Scientifique

sección	# pag.	fechas
Presentación de Temas, ***o Preludio en Cuatro Movimientos*** **[RS01]**	183	Enero – Febrero 1986
Carta ***Introducción*** **[RS02]**	75	Marzo 1984 & Mayo – Junio 1985
Primera Parte ***Fatuidad y Renovación*** **[RS1]**	171	Junio 1983 & Febrero 1984
Segunda Parte ***El Entierro I,*** ***o el Vestido del Emperador de China*** **[RS2]**	247	Abril – Junio 1984
Tercera Parte ***El Entierro II,*** ***o la Llave del Yin y el Yang*** **[RS3]**	343	Septiembre 1984 – Enero 1985
Cuarta Parte ***El Entierro III,*** ***o las Cuatro Operaciones*** **[RS4]**	477	Febrero 1985 – Junio 1985
Las Puertas sobre el Universo ***Apéndice a la Llave del Yin y el Yang*** **[RSap]**	127	Marzo – Abril 1986

ALREDEDOR DE LOS ESQUEMAS Y LOS TOPOS

"la noción de **HAZ** ha sido uno de los instrumentos esenciales a través de toda mi obra de geómetra (...)
y me ha otorgado la llave para la ampliación de la noción de espacio, hacia los topos" [RS01, P13]

"una gran parte de mi obra de geómetra consistió en despejar, y desarrollar más o menos lejos,
las teorías cohomológicas que faltaban para los espacios y las variedades de todo tipo" [RS01, P35]

"GEOMETRÍA ESQUEMÁTICA"	"GEOMETRÍA ARITMÉTICA"
"abanico infinito de variedades" [RS01, P32]	"superestructura de metros cohomológicos" [RS01, P39]
ESQUEMAS	**TOPOS**
"sencillez infantil... simple... humilde... idiota..." [RS01, P32]	"cama amplia para el matrimonio del número y de la magnitud" [RS01, P37]

"...ARMONÍA... UNA MISMA SINFONÍA... UNA MISMA Y VASTA VISIÓN..." [RS01, P23]

"La cosa crucial aquí, en la óptica de las Conjeturas de Weil, es que la nueva noción era lo suficientemente vasta para permitirnos asociar a todo esquema un espacio generalizado, o topos (llamado el topos *étale* del esquema). Algunos invariantes cohomológicos de ese topos (los más sencillos) parecían ofrecer los medios" para ayudar a entender y resolver las Conjeturas [RS01, P41].

ALREDEDOR DE LA CREATIVIDAD MATEMÁTICA

péndulo

DESCUBRIMIENTO (CO/RAZÓN)	**INVENCIÓN** (RAZÓN)
"comprehensión... sondeo... pulsión" [RS01, A2]	"*invención del lenguaje* capaz de expresión" [RS01, P27]
"*aprehensión*" [RS01, P27] – "desconocido" [RS01, P30]	"*expresión*" [RS01, P27] – "conocido" [RS01, P30]
"soledad" [RS01, P5, P65]	"casa... muebles" [RS01, P13, P27]
"ternura... amor... contacto... *yin*" [RS01, P49-P51]	"construcción... ordenamiento... *yang*" [RS01, P49-P51]
"escucha de la voz de las cosas" [RS01, P27]	"traductor" [RS01, P39]
"alma, soplo" [RS01, P16] – "aire libre" [RS01, P13]	"trabajo" [RS01, P27]
"niño" [RS01, A3]	"obrero" [RS01, A3]

"HAZ DE PUNTOS DE VISTA" [RS01, P15-P16]
"OJO QUE NOS HACE DESCUBRIR, Y RECONOCER LA *UNIDAD* EN LA MULTIPLICIDAD" [RS01, P16]

"En la historia de las matemáticas creo ser aquel que ha introducido
la mayor cantidad [... cientos, si no miles...] de nociones nuevas" [RS01, P19]

multiplicidad polisémica reflejada en la **forma** misma de *Récoltes et Sémailles*:
NO LINEAL, ESTRATIFICADA, MULTINIVEL, MULTITEMPORAL

- capas de introducciones, cartas, apéndices
- estratos iterados de notas sobre notas
- haces conceptuales y diagramas

(conexiones, homologías, árboles, hojas, poliedros)

Octubre 28
Séminaire de Géométrie Algébrique (SGA)
(I): Visión general

1960-69 **[1960-69]** ***Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie*** (VII vols., 12 tomos; originales multicopiados: IHES)

- **SGA1. Revêtements étales et groupe fondamental. 1960-61.** "Un séminaire dirigé par A. Grothendieck, augmenté de deux exposés de Mme M. Raynaud". Reediciones: LNM 224, Berlín: Springer, 1971; Documents Mathématiques 3, París: SMF, 2003.
- **SGA2. Cohomologie locale des faisceaux cohérents et théorèmes de Lefschetz locaux et globaux. 1962**. "Alexandre Grothendieck (rédigé para un groupe d'auditeurs), augmenté d'un exposé para Mme Michèle Raynaud". Reedición: Advanced Studies in Pure Mathematics 2, Amsterdam: North-Holland, 1968; Documents Mathématiques 4, París: SMF, 2005.
- **SGA3. Schémas en groupes. 1962-64.** "Un séminaire dirigé para M. Demazure et A. Grothendieck, avec la collaboration de M. Artin, J.E. Bertin, P. Gabriel, M. Raynaud, J.P. Serre". **Tome 1 - Propiétés générales des schémas en groupes.** Reediciones: LNM 151, Berlín: Springer, 1970; Documents Mathématiques 7, París: SMF, 2011. **Tome 2 - Groupes de type multiplicatif et structure des schémas en groupes généraux.** Reedición: LNM 152, Berlín: Springer, 1970. **Tome 3 - Structures des schémas en groupes réductifs.** Reediciones: LNM 153, Berlín: Springer, 1970; Documents Mathématiques 8, París: SMF, 2011.
- **SGA4. Théorie des topos et cohomologie étale des schémas. 1963-64.** "Un séminaire dirigé para M. Artin, A. Grothendieck, J.L. Verdier, avec la collaboration de N. Bourbaki, P. Deligne, B. Saint-Donat". **Tome 1 - Théorie des topos** (Exposés I à IV). Reedición: LNM 269, Berlín: Springer, 1972. **Tome 2** (Exposés V à VIII). Reedición: LNM 270, Berlín: Springer, 1972. **Tome 3** (Exposés IX à XIX). Reedición: LNM 305, Berlín: Springer, 1973.
- **SGA5. Cohomologie *l*-adique et fonctions L. 1965-66.** "Dirigé par A. Grothendieck, avec la collaboration de I. Bucur, C. Houzel, L. Illusie, J.P. Jouanolou, J.P. Serre". Reedición: LNM 589, Berlín: Springer, 1977.
- **SGA6. Théorie des intersections et théorème de Riemann-Roch. 1966-67.** "Un séminaire dirigé par P. Berthelot, A. Grothendieck, L. Illusie, avec la collaboration de D. Ferrand, J.P. Jouanolou, O. Jussila, S. Kleiman, M. Raynaud, J.P. Serre". Reedición: LNM 225, Berlín: Springer, 1971.
- **SGA7. Groupes de monodromie en géométrie algébrique. 1967-69. Tome 1.** "Dirigé par A. Grothendieck, avec la collaboration de M. Raynaud, D.S. Rim". Reedición: LNM 288, Berlín: Springer, 1972. **Tome 2.** "Par P. Deligne et N. Katz". Reedición: LNM 340, Berlín: Springer, 1973.

[SGA4 1/2. Cohomologie étale (P. Deligne). 1977]. (No reconocido por Grothendieck. Raíz de su decepción con Deligne, ver *Récoltes et sémailles.*]



SGA – IHES 1963

*Breves resúmenes de algunas **introducciones** (escritas para las reediciones en forma de libro)*

volumen (parte)	introd. (pp.)	fecha	contenidos
1	2-10	Agosto 1970	**Volumen 1**. "Fundamentos de una teoría del grupo fundamental en geometría algebraica" (2) – "descripción axiomática del grupo fundamental de un esquema" (3) – "reformulación muy cómoda de la teoría de Galois usual" (2) – "presentación de la teoría del descenso" (3). **Volumen 4**. La "topología *étale* y la teoría cohomológica correspondiente (...) proveen un instrumento particularmente suave para el estudio del grupo fundamental" (4) – hay una "necesidad de desarrollar una teoría del grupo fundamental de un topos" (5). Explicación de los enlaces entre EGA y SGA (5-8) –"juego natural de exigencias de coherencia lógica y estética" (7)– y presentación del modo de trabajo en SGA (6-7). "Comentario extra-matemático" (9-10): presentación de las razones del abandono del IHES.
2	6-10	Abril 1968	Sistema de producción del SGA2: exposiciones orales, manuscritos, redacciones de estudiantes y/o colegas, recorrección y revisión por parte de Grothendieck ("armonización") (6). **Volumen 2**. Estudio de pasos de lo local a lo global, vía haces y cohomologías (7) – "teorema de finitud (...) resultado técnico central" caracteriza propiedades finitarias de transferencia entre haces coherentes y haces de cohomología (8-9) – aplicaciones al caso de espacios analíticos complejos (9-10).
3 (1)	2-8	Marzo 1970	Arquitectónica compleja del SGA: oralidades, (re)escrituras, revisiones, ampliación de temas del Seminario Chevalley ("Biblia"), enlaces progresivos y fluctuantes con EGA y con el Seminario Bourbaki (2, 6-8). **Volumen 3**. Dos objetivos centrales: A. "fundamentos cómodos para la teoría general de esquemas en grupos", problemas de representabilidad de funtores y de pasajes al cociente (4); B. "generalización a grupos sobre un pre-esquema de base arbitrario" de la teoría de estructura Borel-Chevalley de grupos algebraicos afines (5). "Papel crucial de los toros" (5-6). "Objetivo principal: desarrollar técnicas que se apliquen al estudio de esquemas en grupos sobre una base arbitraria" y profundizar en "propiedades infinitesimales (...) que permitan aplicar las técnicas de descenso en el caso no galoisiano" (6).
4 (1)	2-13	Noviembre 1969	**Volumen 4**. "Objetivo inicial: desarrollar la teoría de la cohomología *étale* de esquemas" (2) – "el lenguaje de las topologías y los topos en geometría algebraica ha ido creciendo" (2). Lugar central: topos, morfismos de topos, categorías, prehaces (3). Aportes sustanciales de Deligne (3-7). Topología *étale*: permite formular y demostrar resultados clásicos cohomológicos en un contexto ampliado (8), así como establecer pasajes (límites proyectivos) de cohomologías en car. *p* hacia cohomologías en car. 0 (cohomología de Weil) (9). "Fenómenos esencialmente nuevos" procedentes de car. *p*, intratables mediante la topología *étale*, dan lugar a topologías más finas ("cristalina") (9-10). Emergencia de problemas de homotopía (grupo fundamental, teoría de tipos de homotopía) (10). Trabajos esenciales: A. "teoría de haces desde el punto de vista de los sitios, o mejor, de los topos"; B. "teoremas de cambio de base (...) con uso de coeficientes en haces de grupos no necesariamente conmutativos" (12).
5	iii-vii	Febrero 1977 (por Luc Illusie)	**Volumen 5**. "El corazón del Seminario está constituido por la fórmula de Lefschetz en cohomología *étale*" (iii) – "Todos los resultados anunciados por Grothendieck en su exposición del Seminario Bourbaki [alrededor de la racionalidad de las funciones *L*, 1968] se demuestran aquí completamente" (iii). Comentarios sobre cómo el SGA4 1/2 (Deligne) simplifica y generaliza diversos resultados (iii-v). "En el curso del Seminario oral, Grothendieck había hecho una exposición sobre problemas abiertos y enunciado algunas conjeturas. La exposición desafortunadamente no fue redactada, ni tampoco su muy bella exposición introductoria, que revisaba las fórmulas de Euler-Poincaré y de Lefschetz en diversos contextos (topológico, analítico complejo, algebraico)" (vi).
6	2-5	Junio 1971	**Volumen 6**. "El objetivo del presente Seminario es desarrollar una teoría global de intersecciones, y una fórmula de Riemann-Roch, para esquemas arbitrarios" (3). "Un instrumento esencial para formular una teoría satisfactoria es la teoría de categorías derivadas de Verdier" (3). Problema esencial: falta una "idea nueva" para poder englobar variantes generales de Riemann-Roch y Atiyah-Singer (4).

No se escribió introducción o prefacio para el Volumen 7.
Ya la decepción de Grothendieck con su entorno, y en particular con Deligne, autor fundamental en SGA7, era demasiado grande.



Noviembre 4
Séminaire de Géométrie Algébrique (SGA)
(II): Topos

1960-69 **[1960-69]** ***Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie*** (VII vols., 12 tomos; originales multicopiados: IHES)

- **SGA4. Théorie des topos et cohomologie étale des schémas. 1963-64.** "Un séminaire dirigé para M. Artin, A. Grothendieck, J.L. Verdier, avec la collaboration de N. Bourbaki, P. Deligne, B. Saint-Donat". **Tome 1 - Théorie des topos** (Exposés I à IV). Reedición: LNM 269, Berlín: Springer, 1972. **Tome 2** (Exposés V à VIII). Reedición: LNM 270, Berlín: Springer, 1972. **Tome 3** (Exposés IX à XIX). Reedición: LNM 305, Berlín: Springer, 1973.

Breves resúmenes de fragmentos escogidos de SGA4

	referencia	contenidos
UNIVERSOS (por N. Bourbaki)	*SGA4.1 Exposé I*	*"Univers" (185-217).* Grothendieck (jugando sobre los "papeles secretos" de Bourbaki, 185) introduce el axioma de suficientes universos y demuestra (prueba detallada usando recurrencia transfinita, 196-199) su equivalencia con existencia de cardinales (fuertemente) inaccesibles. Grothendieck comenta que "según dice Paul Cohen, parece difícil y aún indemostrable asegurar que el axioma de universos es inofensivo" (214). *Observación*. La noción elemental de *clasificador de subobjetos* (Lawvere) no aparece tal cual en SGA4. Sin embargo, la representabilidad de familias infinitas de monos aparece en el *Exposé I* (secciones 8.2, 8.3), acorde con la importancia dada por Grothendieck al "yoga" de los funtores representables.
TOPOLOGÍAS DE GROTHENDIECK (por J. L. Verdier)	*SGA4.1 Exposé II*	*"Topologies et faisceaux" (219-263).* Definición de topologías (posteriormente denominadas "de Grothendieck"), vía axiomas (estabilidad, localidad, identidad) para cribas (subobjetos de funtores representables) (219-220). Sitios: categorías con topologías (221). Definición de pretopologías, vía axiomas para familias de morfismos (equivalencia de topologías y pretopologías en el caso de ccc) (222). Prehaces separados y haces de conjuntos sobre un sitio (223). Caracterización de haces asociados a prehaces (224-226). Topología canónica: topología más fina para la cual los representables son haces (226). Teoremas de hacificación (228-230), caracterización funtorial (232-234) y reflexividad (234-235). Límites (inductivos) y colímites (proyectivos) en categorías de haces (obtenidos a partir de la categoría de prehaces, vía reflexividad) (235-239). Lemas tipo Giraud (257). Haces a valores en categorías arbitrarias (anillos, grupos, módulos) (257-259). Categoría abeliana formada por haces de módulos (260).
TOPOS (por A. Grothendieck y J. L. Verdier)	*SGA4.1 Exposé IV*	*"Topos" (299-525).* "Estabilidad notable" de los topos (300) y "ampliación substancial de la noción de espacio topológico" (301). Ventajas de la localización (sitios) (301) y uso para estudio de invariantes homológicos y homotópicos (299). Multitud de ejemplos: topos clasificador, modular, étale, cristalino, etc. (301). "Parece razonable y legítimo a los autores del presente Seminario considerar que el objeto de la topología es el estudio de los topos (y no sólo de los espacios topológicos)" (301). Definición de un topos como equivalente a una categoría de haces sobre un sitio (302). Teorema de Giraud (302-306): caracterización de topos por propiedades de exactitud. Ejemplos de topos (311-322): topos asociado a un espacio topológico, topos inicial (vacío) y final (puntual), topos asociado a un espacio de operadores, topos de acciones de un grupo, topos clasificador de un grupo topológico, topos de prehaces, topos clasificador de un progrupo, ejemplo de un no topos (falla en generador). Morfismos de topos (formas generales de continuidad) (323-332): morfismos "geométricos" (terminología posterior), exactitud e intuición geométrica, equivalencias entre topos, 2-categoría de topos ("diferencia más importante" versus espacios topológicos, 331). Ejemplos de morfismos de topos (332-365). – Etc.
TOPOS ÉTALE DE UN ESQUEMA (por A. Grothendieck)	*SGA4.2 Exposé VII*	*"Site et topos étales d'un schéma" (341-365).* Definiciones: morfismo étale entre esquemas, topología étale (topología de Grothendieck formada por cubrimientos étales de esquemas), sitio étale $X_{ét}$ de un esquema X, topos étale de un esquema (topos de haces sobre el sitio $X_{ét}$) (343). (Pseudo)funtorialidad de los cambios de base: esquemas / topos étales (pseudo, por cambios de universos) (344-345). El problema de universos es reducible (346). Reconstrucción del primer grupo de homología como grupo de clases de haces principales y homogéneos sobre el sitio étale (348). El paso de topología de Zariski a topología étale es la clave de la reconstrucción (349), ampliable a los grupos de homología superiores (350). Generadores del topos étale (350). Reticulado de topologías diversas: Zariski, étale, fpqc, etc. (353). Correlaciones Zariski / étale: morfismos de topos y homomormisfos de funtores cohomológicos (354-355). Cohomología de límites proyectivos de esquemas (356-365).

Las referencias numéricas entre paréntesis corresponden a las páginas del volumen (1-3) de SGA4 en mención

TOPOS ÉTALE DE UN ESQUEMA
categoría de haces conjuntistas sobre el sitio étale

sitio étale

topología étale:
cubrimientos de esquema por morfismos étales

morfismo *étale*: no singular + no ramificado
("liso": Víctor Hugo) (GALOIS + RIEMANN)

categoría de haces abelianos sobre sitio étale
[categoría abeliana]

cohomología étale [aplique *Tohoku*]
resolución Conjeturas Weil

TOPOS
categorías de haces sobre topologías de Grothendieck

TOPOLOGÍAS DE GROTHENDIECK

familias recubridoras — operador clausura

RIEMANN	GALOIS
GEOM (ext)	ALG (int)

ESQUEMAS

anill. conm. unit.
haces sobre espectro
de ideales primos
fibras anillos locales

R-R-G

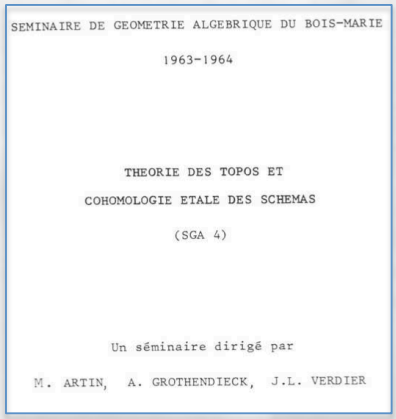
anillos de funciones
holomorfas/meromorfas

anillos de enteros
algebraicos

FAC + GAGA (Serre)

continuación analítica — **HACES** — grupos abelianos
CATEGORÍAS ABELIANAS

RIEMANN	GALOIS
CONT	DISCR


SEMINAIRE DE GEOMETRIE ALGEBRIQUE DU BOIS-MARIE

1963-1964

THEORIE DES TOPOS ET
COHOMOLOGIE ETALE DES SCHEMAS

(SGA 4)

Un séminaire dirigé par

M. ARTIN, A. GROTHENDIECK, J.L. VERDIER

Noviembre 11
Cosechas y Siembras (II)
Las Puertas del Universo – Pares Yin/Yang – Creatividad, Diagramas, Homologías

---

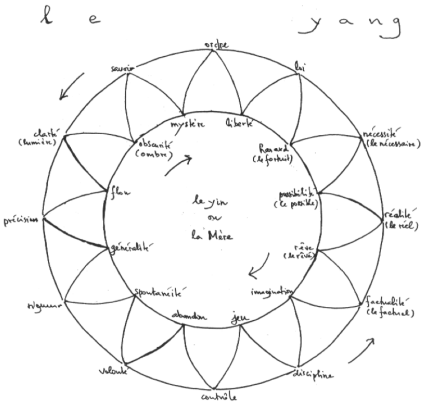
sección	*título*	*páginas*	*contenidos*
1	*La roca y las arenas*	1-7	Inicios 1979, visión 1984, realización final Marzo/Abril 1986. Pares *yin-yang*, grafos de pares ("combinatoria o topología") (1-2). Universalidad, realidad (3-4). Cortes y pegamientos, tipografía y topografía, enlaces medios y estructura global ("árbol de navidad" y variantes) (5-6).
2	*Cosas poliandrias y cosas polígamas*	7-9	Pares arquetípicos ligados a nombres (7). Poligamia (un *yang* enlazado con dos *yin*, hijo con madre y viejo – sol con luna y tierra) y poliandria (un *yin* enlazado con dos *yang*, madre con padre e hijo – tierra con sol y cielo) (7-8). Diagrama en zigzag: potencia/energía/materia/espíritu/cuerpo (8).
3	*La ambigüedad creativa (1): pares, colas y rondas*	9-12	Ambigüedad del *yin* y el *yang*: superposisiciones, cambios de perspectiva (9-10). Colas (11) y rondas (12): enlaces variables de *yin/yang*. Una ronda en el *Elogio del Incesto*: aprendiz/tripulación/barco/río/mar/aprendiz ("en cuyos ojos se refleja el mar y penetra en su alma") (12).
4	*La ambigüedad creativa (2): la inversión de los papeles*	13-15	Parejas *yin/yang*: "cósmicas" o "universales" (esenciales) versus "ocasionales" (ambigüedades no esenciales) (13). Cartografía metódica (13). Inversiones en el *yin/yang*: momentos de creatividad (14). Dominancias y tonalidades (14). "La imagen de la Madre (...) encarnación más completa y profunda del *yin*" (15).
5	*La ambigüedad creativa (3): la parte contiene al Todo*	15-16	Par: parte (*yang*) / Todo (*yin*) (16). Proceso de reflexión: "muy a menudo, la parte *refleja* fielmente el Todo, y por tanto lo *contiene*, tal como está contenida en él" (16). Ejemplos de reflexión: hombre, cuerpo, cara, voz, mano – sostén de técnicas divinatorias (16).
6	*La ambigüedad creativa (4): los extremos se tocan*	16-18	Par: caliente (*yang*) / frío (*yin*) (16). Variaciones, grados, intensidades, inversión: lo caliente extremo se convierte en *yin*, lo frío extremo se convierte en *yang*, "los extremos se tocan" (17). "Imagen simplista" del círculo para representar los movimientos e inversiones *yin/yang* (18).
7	*Mis perplejidades "continente–contenido" y "lo pesado – lo ligero"*	18-21	Pares delicados, no bien definidos, paradójicos, etc. (19-20). Inversiones, asociaciones por subgrupos (19-20). Vaivenes entre continente y contenido (19), entre lo abstracto y lo concreto (20). "El juego de analogías, guía precioso e indispensable (...) no es infalible, requiere cautela y prudencia" (20).
8	*La búsqueda de la unidad*	21-23	Correlaciones (no equivalentes) entre los pares: particular/general, abstracto/concreto (21). Importancia de los grados de abstracción en matemáticas, enlace permanente de particularidad y generalidad (22). Par básico: multiplicidad/unidad (23), "me siento yo mismo como un múltiple a la búsqueda de la unidad" (23).
9	*Generalidad y abstracción – o el precio a pagar*	23-27	Niveles y umbrales de abstracción (24). Búsqueda de generalidad y unidad ("inmersión profunda", 25), para lo cual hay que pagar el precio de la abstracción (unidad - *yin* versus abstracción - *yang*) (25-26). Limitantes de la investigación científica: recorte, estallido, divergencia (27).
10	*Historia de icosaedros y de árboles de navidad*	27-31	Recuento de búsquedas para llegar a "una aprehensión *formal* o *matemática* global del conjunto de pares *yang/yin*" (27). Deseo de construcciones "canónicas" y "naturales" (28). "Es una lástima que Kepler no esté aquí para leerme" (30). Grafos, hexágonos, icosaedros (28-29) y árbol de navidad (30).
11	*Deseo y necesidad – o la vía y el fin*	31-34	Reflexiones nocturnas (23, 27, 31, 37, 41, etc.). Grupos de pares que impulsan el pensamiento: polos, atractores, dinámica, tonalidades *yin/yang* (31-32). Vaivén esencial entre síntesis y análisis, diferenciación y unidad (33). Después de comprehensiones en el orden del Todo, "nuestros *ojos* ya no son los mismos" (34).
12	*Precisión y generalidad – o la superficie de las cosas*	34-37	Movimientos del pensamiento: diagrama en zigzag entre términos *yang* (pureza, lo particular, lo preciso, lo claro, lo sabido, saber) y términos *yin* (fecundidad, lo general, lo vago, lo obscuro, lo misterioso, conocimiento) (35-36). Dinámicas e inversiones (36), idealidad y realidad (sueño, profundidad) (37).
13	*El matrimonio del orden y el misterio*	37-41	Iteración del zigzag (¡homologías escondidas!) a siete cualidades *yang* y ocho *yin*, enlazadas en vaivén progresivo, entre imaginación y misterio (37). Enlace entre unidad y misterio (*yin*) / orden y sencillez (*yang*), bajo una armonía profunda de sombra y luz, allende el mismo espíritu humano (40).
14	*Lo caracterológico y lo característico – o el Acordeón cósmico*	41-46	El Soñador regala la imagen (="realidad tangible", 42) del "acordeón" (o "armónica") para representar el interminable zigzag *yin/yang* (41). Más sueños (42). "Nuevas notas imprevistas en el pensamiento explorador" (43). Extensión del zigzag y enlace circular (45): DIBUJO DEL ACORDEÓN CÓSMICO (46).
15	*¿Descubrimiento o invención? – o el escriba y el "Otro"*	47-51	¿Invención o descubrimiento de las figuras? (47). Descubrimiento matemático (47). Estudio matemático de las figuras: base de términos, grafos orientados (que llevan al icosaedro) (49), estructuras afines (que llevan al acordeón/flor) (50). Nacimiento creativo desde el limbo, la mano del escriba está guiada por *Otro* (51).
16	*La Flor y su movimiento – o: más me alejo, más me acerco*	51-57	Análisis del acordeón/flor cósmico(a): pétalos, montes, valles, pendientes (51-52). Interior de la flor (*yin*): parte fecunda, granular (55). Exterior de la flor (*yang*): espíritu (55). Dinámica: del exterior (superficie, luz) al interior (profundidad, sombra) (55). Expansión de caminos: de flor planar a flor esférica (56).
17	*Caos y libertad– o las hermanas terribles*	57-61	Desaparición del caos en la flor cósmica (59): caos y libertad pueden considerarse "anti-atractores" dentro del sistema dinámico general (59). Sospechas sobre la libertad: carácter "necesario" de la investigación científica (59-60). "Horror" del caos: es una "simple apariencia" detrás de la cual emerge un orden (61).
18	*Lo vago y lo preciso – o la sacadera y el Mar*	62-64	Atractores *yang* subordinados a sencillez y orden: abstracción, precisión, estructura (62). Vaivén entre precisión y vaguedad, desconocimiento y conocimiento, misterio y orden (63). "Cosa loca (...) nada aparece de ese movimiento" (63). Censura "implacable" del "mar de brumas sin fondo y sin límites" (63-64).
19	*Orden y estructura – o el espíritu de precisión*	64-65	Entendimiento de una substancia a través de "las mallas cada vez más apretadas, de estructuras más y más finas, que se *pegan* a la substancia" (64). Búsqueda de estructuras: modo privilegiado del espíritu de precisión (="espíritu de geometría" de Pascal) (64-65).
20	*Lo abstracto y lo concreto (1): nacimiento del pensamiento*	66-68	"El espíritu, lanzado en la persecución de la elusiva carne de las cosas, va como un Ahab detrás de la Ballena blanca" (66). Versus un miedo a la abstracción (repugnancia a "cambiar de piso", 66), el lenguaje y el acto de "nombrar", paradigmas de la abstracción, constituyen el "*acto arquetípico* del espíritu" (67).
21	*Lo abstracto y lo concreto (2): el milagro de la sencillez*	68-71	En contra de prejuicio comunes, la abstracción es el medio para aprehender y despejar lo simple dentro de lo complejo (69). Esencial riqueza abstractiva de la elipse sobre el círculo (71). Correlación inversa entre fondo (entendimiento, niveles de profundidad) y forma (expresión abstracta, niveles de elevación) (69).
22	*Lo abstracto y lo concreto (3): los estratos del lenguaje – o la piel y el abrazo*	71-78	"La embriaguez del descubrimiento no es privilegio del gigante (...) sino del niño" (71). "*Olvidar* (...) *escuchar*": clave de la invención (72). "La grandeza de Riemann" se debe a un pensamiento vasto: matemático y filósofo, abstractor e ingenuo (74-75). Relatividad y estratificación de la noción de abstracción (76-77).
23	*Abstracción y sentido – o el milagro de la comunicación*	78-82	El revés de la abstracción: esterilidad de un juego por placer (78). Peligro de "*perder contacto con lo concreto*" (79). Sentido: transformación y resonancia de "nubes" entre emisores y receptores (80-82). "Mi responsabilidad (...) es estar realmente presente y ser *verdadero* en lo que hago" (82).
24	*La lengua-madre – o el camino de regreso*	83-92	Allende las palabras y lenguajes usuales, existe una "lengua madre" de emociones y dolores (83-84), una "lengua-imágenes" de sueños e imaginación (85-86), de cuerpo y percepción (87), de danza y vida (88), íntima y personal (86), que se abre a una "libertad creativa infinita" (89) – guiada por el Soñador (92).

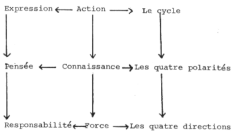
25	*Las Puertas sobre el Universo*		
	(A) Puertas y orificios de cerraduras	93-108	Veintinueve grupos afines (o "puertas") de pares *yin/yang*. DIBUJO DE FLORES (a tres y cuatro pétalos) ligadas al grupo "Fe" (98). DIBUJO DE FLOR (a cuatro pétalos) ligada al grupo "Responsabilidad (o Karma)" (105).
	(B) El árbol	108-111	Lado derecho (a los ojos del árbol, izquierda en el papel): *yang* - pensamiento (nuestra "razón") (109). Lado izquierdo (a los ojos del árbol, derecha en el papel): *yin* - emoción (nuestro "co/razón") (109). DIBUJO DEL ÁRBOL (110).
	(C) La ventana	111-114	Derivación de nueve umbrales dentro del árbol: expresión, pensamiento, responsabilidad (111), cuatro direcciones (111), cuatro polaridades (112), ciclo (113), acción, conocimiento, fuerza (113), englobados todos dentro de un DIBUJO DE VENTANA (homología) sobre el universo (114).
	(D) El bi-icosaedro	114-127	"Par de dos estructuras de icosaedro sobre el hexagrama pensamiento": canonicidad y complementariedad *yin/yang* (114). DIBUJO DE ESTRUCTURA BI-ICOASEDRA para el pensamiento-*yin* y el pensamiento-*yang* (126).

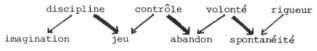
Las referencias numéricas entre paréntesis corresponden a las páginas del manuscrito PU (*Les Portes sur l'Univers*) – Apéndice de *Récoltes et Sémailles* [127 pp., 1986]

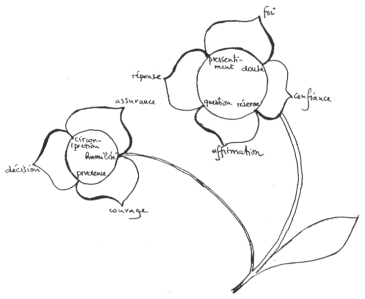


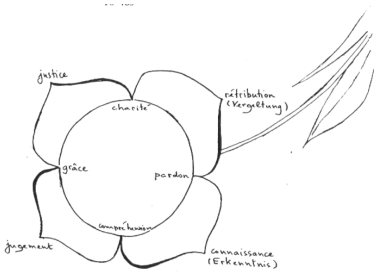
FIGURAS PRINCIPALES DE *LAS PUERTAS DEL UNIVERSO*
(de izquierda a derecha – de arriba a abajo: pp. 46, 114, 100 – 98, 105 – 110, 126)

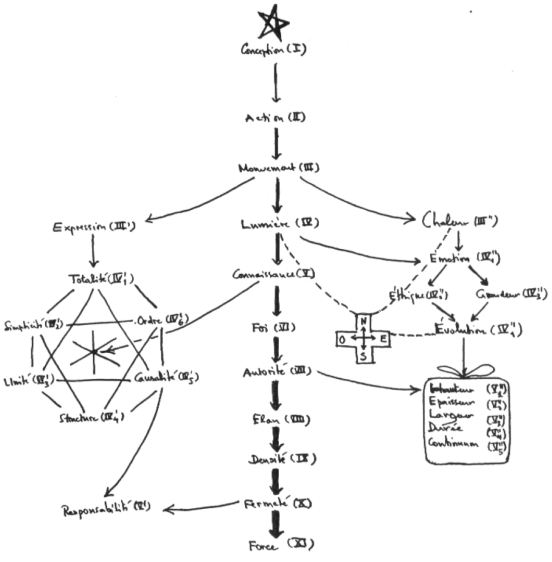


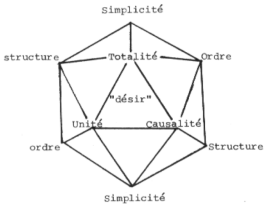


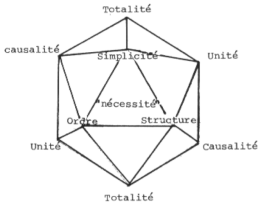








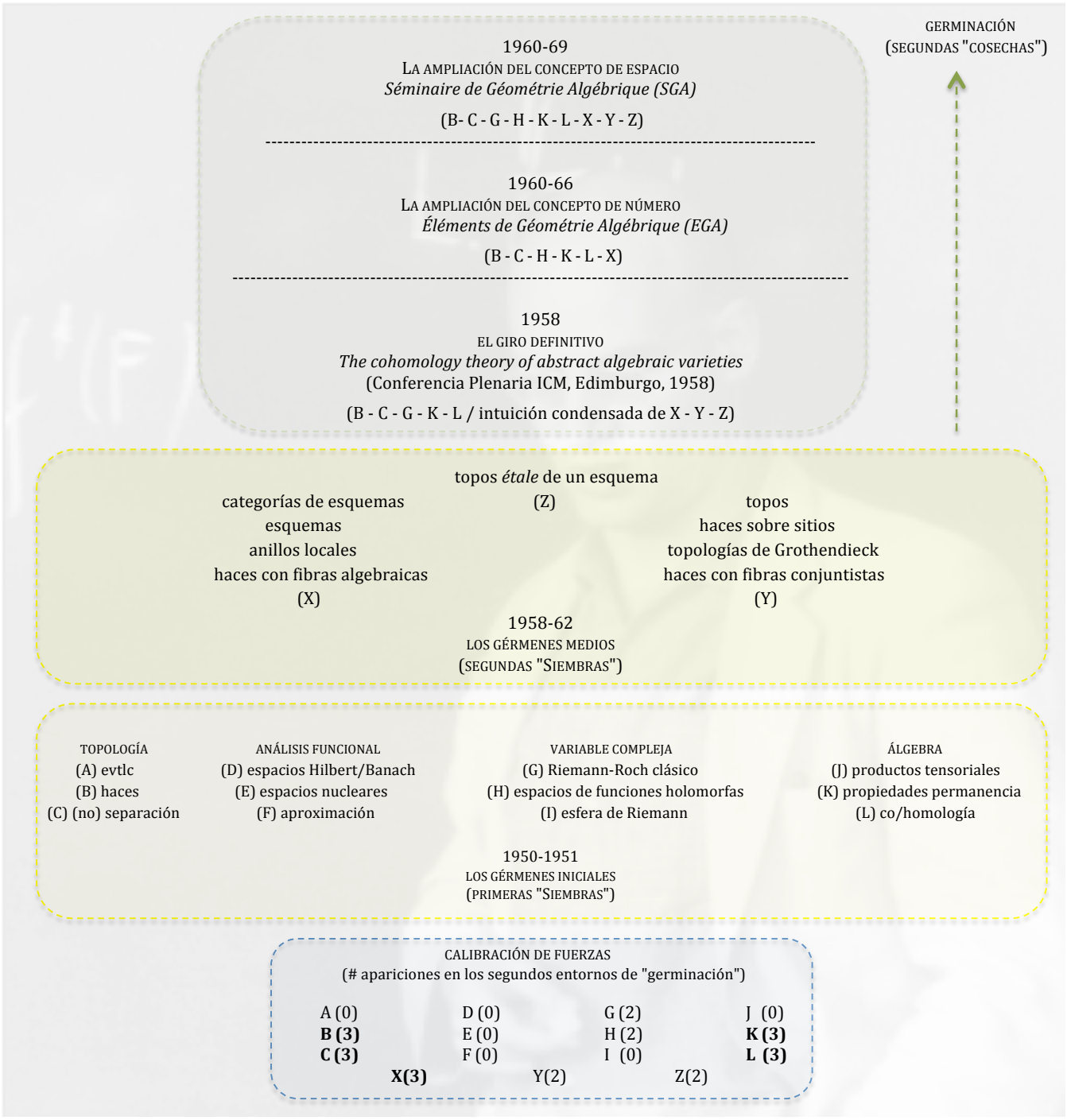




Noviembre 18
Diagramas de la creatividad en Grothendieck
Segundo periodo (1958-1970)

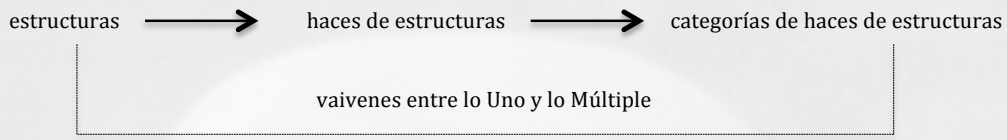
---

(1) LA ARQUITECTÓNICA MATEMÁTICA

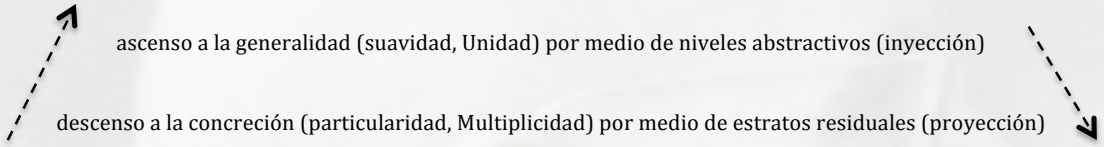


(2) LAS TENSIONES METODOLÓGICAS

(A) *AMPLIACIÓN DE LA NOCIÓN DE ESTRUCTURA*



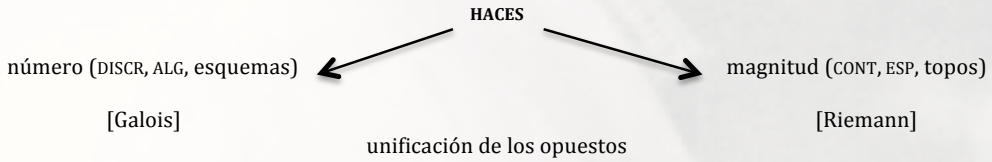
(B) *EL ASCENSO Y EL DESCENSO DEL ENTENDIMIENTO* (Llull)



(C) *GRANDES PROBLEMAS: INMERSIONES EN "MAREAS"*

problema	*marea*	*haces en juego*
Riemann-Roch	K-teoría	grupo libre de haces coherentes
(Co)homologías	categorías abelianas	haces abelianos
Conjeturas de Weil	topos *étale*	morfismos *étales* (Gal-Riem) entre esquemas
Hipótesis de Riemann	topos aritmético (Connes)	haces aritméticos sobre F(1)

(D) *COINCIDENTIA OPPOSITORUM* (Cusa)

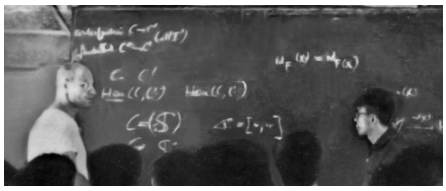


UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA – SEDE BOGOTÁ – DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

EPISTEMOLOGÍA E HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS
SEMINARIO CONTINUO DE FILOSOFÍA DE LAS MATEMÁTICAS
2016-I

GROTHENDIECK

(3ª PARTE – 3/3)


"Con sorpresa y maravilla descubrí a lo largo de los años la riqueza prodigiosa, realmente inagotable,
la profundidad insospechada de la «topología de superficies» o «geometría de superficies»" [Grothendieck, 1984]

1	*(1 feb)*	*Mapa: (1) "niño" (1928-1958), (2) "mandarín" (1958-1970) y (3) "eremita" (1970-1990).*
2	*(3 feb)*	*Las estructuras universales detrás de Galois y Riemann: grandes conceptos y problemas.*
3	*(10 feb)*	*Las homología y homotopía categóricas: grandes conceptos y problemas.*
4	*(17 & 22 feb)*	**Motifs***: arquetipos de las (co)homologías (1967).*
5	*(24 & 29 feb)*	*1970: el entorno filosófico, técnico y biográfico. Survivre et vivre (1970-1975).*
6	*(2 & 7 mar)*	**La longue marche à travers la théorie de Galois***: (1) geometría anabeliana (1981).*
7	*(9 & 14 mar)*	**La longue marche à travers la théorie de Galois***: (2) teoría de Teichmüller (1981).*
8	*(13 & 18 abr)*	**À la poursuite des champs***: homotopía categórica "local" (1983).*
9	*(20 & 25 abr)*	**Esquisse d'un programme***: (1) teoría de Teichmüller y dibujos de niños (1984).*
10	*(27 abr & 2 may)*	**Esquisse d'un programme***: (2) topología moderada y stacks (1984).*
11	*(11 & 16 may)*	**Les dérivateurs***: homotopía categórica "global" (1990).*
12	*(18 & 23 may)*	**Récoltes et semailles** *(1985)* & **La clef des songes** *(1986): regreso a la metodología.*
13	*(25 may)*	*Film: AG. Diagrama final de la creatividad en Grothendieck (fin de la tercera parte).*

SALÓN 404-212	miércoles	lunes subsiguiente (cuando indicado)
14.00-16.00	presentación del coordinador	presentaciones de estudiantes y complementos

Prerrequisitos.

Pregrado de Matemáticas: madurez matemática, tipo *Grupos y Anillos*, *Topología* o equivalente. Posgrado de Matemáticas: abierto. Otras Carreras y Posgrados, acercarse a discutir la idoneidad (o no idoneidad) con el instructor.

Evaluación.

Cada estudiante inscrito al **curso** *Epistemología e historia de las matemáticas* deberá proponer, a mediados de semestre, el tema de un ensayo escrito (E), que desarrollará en la segunda mitad del semestre, y obtendrá también una nota de participación (P), asociada a las presentaciones complementarias de los días lunes (sesiones 4-12). La nota final del curso se obtendrá mediante la fórmula 0.3P + 0.7E.

Bibliografía.

Alexandre Grothendieck, "Standard conjectures on algebraic cycles", en: *Algebraic Geometry (Tata, Bombay, 1968)*, OUP: 1969, pp. 193-199.
Alexandre Grothendieck, "La longue marche à travers la théorie de Galois", manuscrito inédito, 1981.
Alexandre Grothendieck, "À la poursuite des champs", manuscrito inédito, 1983.
Alexandre Grothendieck, "Esquisse d'un programme", manuscrito inédito, 1984.
Alexandre Grothendieck, "Les dérivateurs", manuscrito inédito, 1990.
Alexandre Grothendieck, *Récoltes et Semailles*, manuscrito inédito, 1985.
Alexandre Grothendieck, *La Clef des Songes*, manuscrito inédito, 1987.

Fernando Zalamea - Oficina: 405-327 - Tel. (oficina): 3165000-13214
Mail: fernandozalamea@gmail.com - Web: www.docentes.unal.edu.co/fzalameat/

Febrero 3
Las estructuras universales detrás de Galois y Riemann:
grandes conceptos y problemas

Objetos centrales de la década 1980-90:

espacios moduli : clases de *espacios*, *módulo* adecuadas equivalencias
(jerarquización, clasificación de los espacios)

caso particular: los *espacios moduli* de superficies de Riemann:
clases $M_{g,n}$ de superficies de Riemann de género g con n puntos distinguidos
módulo isomorfismo analítico (conformidad)

Algunos temas centrales de ***La longue marche à travers la théorie de Galois*** [1981]:

(1) **GEOMETRÍA ANABELIANA**

Dada X variedad algebraica, puede construirse (Grothendieck) su *grupo étale fundamental* $\widehat{\pi_1(X)}$
(= compleción profinita de grupos finitos de automorfismos en la categoría de cubrimientos étales de X)

Programa de Grothendieck
¿qué tanto X está caracterizada por $\widehat{\pi_1(X)}$?
En caso positivo, X será denominada anabeliana (y $\widehat{\pi_1(X)}$ estará lejos de ser abeliano)

Mochizuki (1996) demuestra que toda curva algebraica proyectiva es anabeliana

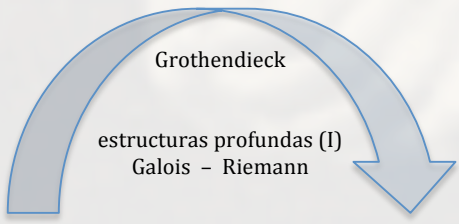
Conjetura Profunda: los $M_{g,n}$ constituyen todas las variedades anabelianas sobre Q

(2) **TEORÍA DE TEICHMÜLLER**

Dados los M_g (=$M_{g,0}$) pueden construirse los espacios de Teichmüller T_g
que incorporan, en objetos universales, las variaciones continuas de familias M_g

Programa de Grothendieck
¿qué tanto el grupo de Galois absoluto $Gal(\bar{Q}: Q)$
puede describirse mediante sus acciones sobre la torre de los T_g?

Conjetura Profunda: existe un grupo universal GT (descrito mediante
generadores y acciones sobre la torre de Teichmüller) tal que GT ≈ $Gal(\bar{Q}: Q)$



Obstrucción importante:
los espacios *moduli* $M_{g,n}$ no conforman esquemas en general (e.g. existen curvas sin automorfismos)

Pursuing Stacks (*À la poursuite des champs*) [1983]:

en cambio, los espacios *moduli* $M_{g,n}$ sí conforman **STACKS** (= "champs", "gerbes", pilas),
es decir, funtores fibrados sobre categorías base generales con topologías de Grothendieck
(generalización de haces, cuya categoría base es *Con*)

caso esencial: $M_{1,1}$ stack de curvas elípticas (Mumford-Deligne)

Concentrándose en "la profundidad insospechada de
la topología de superficies o la geometría de superficies" [1984]
se obtienen nuevas conexiones entre las regiones esenciales grothendickianas:

variable compleja / álgebra / topología / teoría de números

teoría de categorías

Algunos temas centrales en ***Esquisse d'un programme*** [1984]:

(1) **TOPOLOGÍA MODERADA**

Estudio de propiedades de *suavidad* en geometría algebraica real,
vía "buenos" subconjuntos: semialgebraicos, semianalíticos, subanalíticos (Hironaka), etc.

Proyecto recuperado y traducido en teoría de modelos: O-minimalidad (van den Dries)

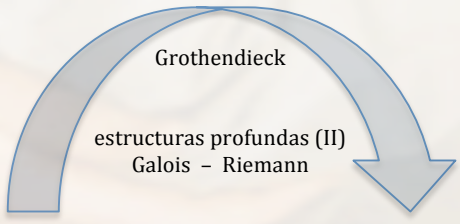
(2) **DIBUJOS DE NIÑOS**

Estudio de inmersiones de grafos conexos bicolores ("dibujos de niños")
en variedades topológicas (compactas, orientadas)

Los dibujos de niños resultan invariantes bajo adecuadas acciones de $Gal(\bar{Q}: Q)$

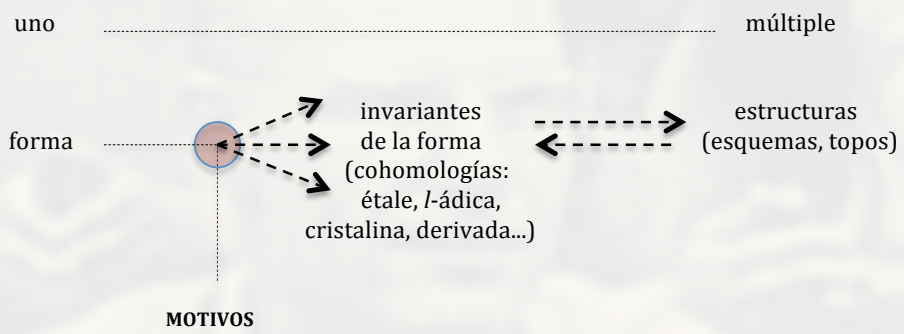
Todo dibujo de niños genera en la variedad donde se sumerge una superficie de Riemann natural

Las superficies de Riemann así generadas se caracterizan (Belyi) como las curvas algebraicas *suaves* sobre $\bar{Q}$



Febrero 10
Homología y homotopía categóricas:
grandes conceptos y problemas

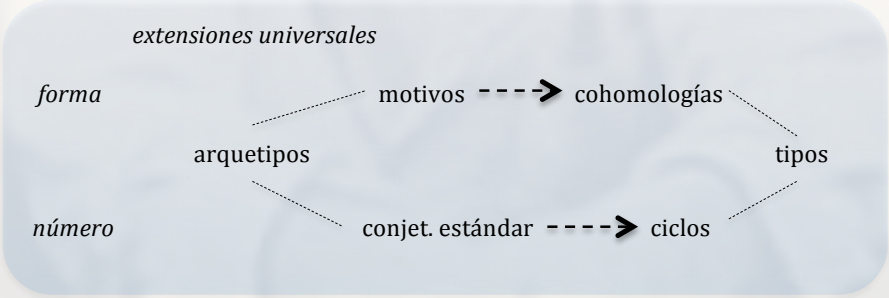
YOGA mediando entre formas y estructuras

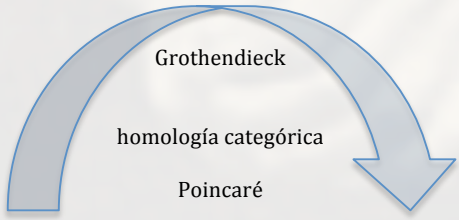


trabajos de Grothendieck (IHES, 1964-70) – Manin (Moscú, 1967-69)

Standard conjectures on algebraic cycles [1968]

"Las **CONJETURAS ESTÁNDAR** van considerablemente más allá que las conjeturas de Weil. Forman la base de la llamada «teoría de motivos», es decir, una teoría sistemática de «propiedades aritméticas» de la variación algebraica, encarnada en los grupos de clases de ciclos para equivalencia numérica"





Pursuing Stacks (*À la poursuite des champs*) [1983]

estudio de *todas* las categorías de prehaces
cuyos objetos modelan *tipos de homotopía*

• aspectos esquemáticos y topósicos de tipos de homotopía

X espacio topológico

↓

Sing(X) complejo singular de *X*

↓

∞-categoría (conjunto simplicial con buenas proyecciones de frontera)

• estructuras emergentes: **∞-GRUPOIDES, ∞-CATEGORÍAS, ∞-TOPOS**
estudian tipos de homotopía en ambientes axiomáticos más amplios / suaves

Les dérivateurs [1990]

topología algebraica ⟶ inversión ⟶ **"ÁLGEBRA TOPOLÓGICA"**

fundamentación en (subcategorías de) **CATEGORÍAS ACCESIBLES**
(idea original, 1956-57, categorías suaves de coeficientes y fracciones en "álgebra cohomológica")

problemas generales de correlacionalidad, variación e invarianza entre *todas* las categorías

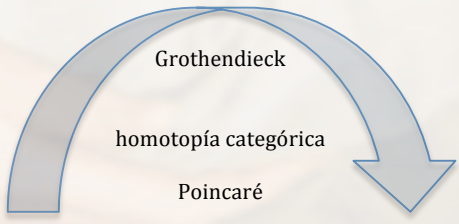
DERIVADOR

$D: \ Diag^{op} \longrightarrow CAT$ 2-funtor

con propiedades axiomáticas que capturan
(1) "variación de coeficientes"
(2) "aspectos intrínsecos del formalismo homotópico-homológico"

variabilidad a su vez para *Diag*: puede ser *Cat* (categorías pequeñas), *CatFin* (categorías finitas), *OrdFin* (categorías asociadas a órdenes finitos), *Top* (categoría de topos), etc.

paradigmas
Diag = *Cat* ; *C* categoría fija; *D(J)* = funtores de *J* en *C* (Yoneda)
Diag = *Top* ; *D(T)* = categoría derivada de *K*-módulos en *T* (*K* anillo arbitrario)



Febrero 17
Motivos - Conjeturas estándar

1963 Inicios realizados aparentemente en 1963, manuscrito 1964 [cf. *Récoltes et semailles* RS01, P47; RS2, 212].

196? **[196?] *"Motifs"***, manuscrito inédito.

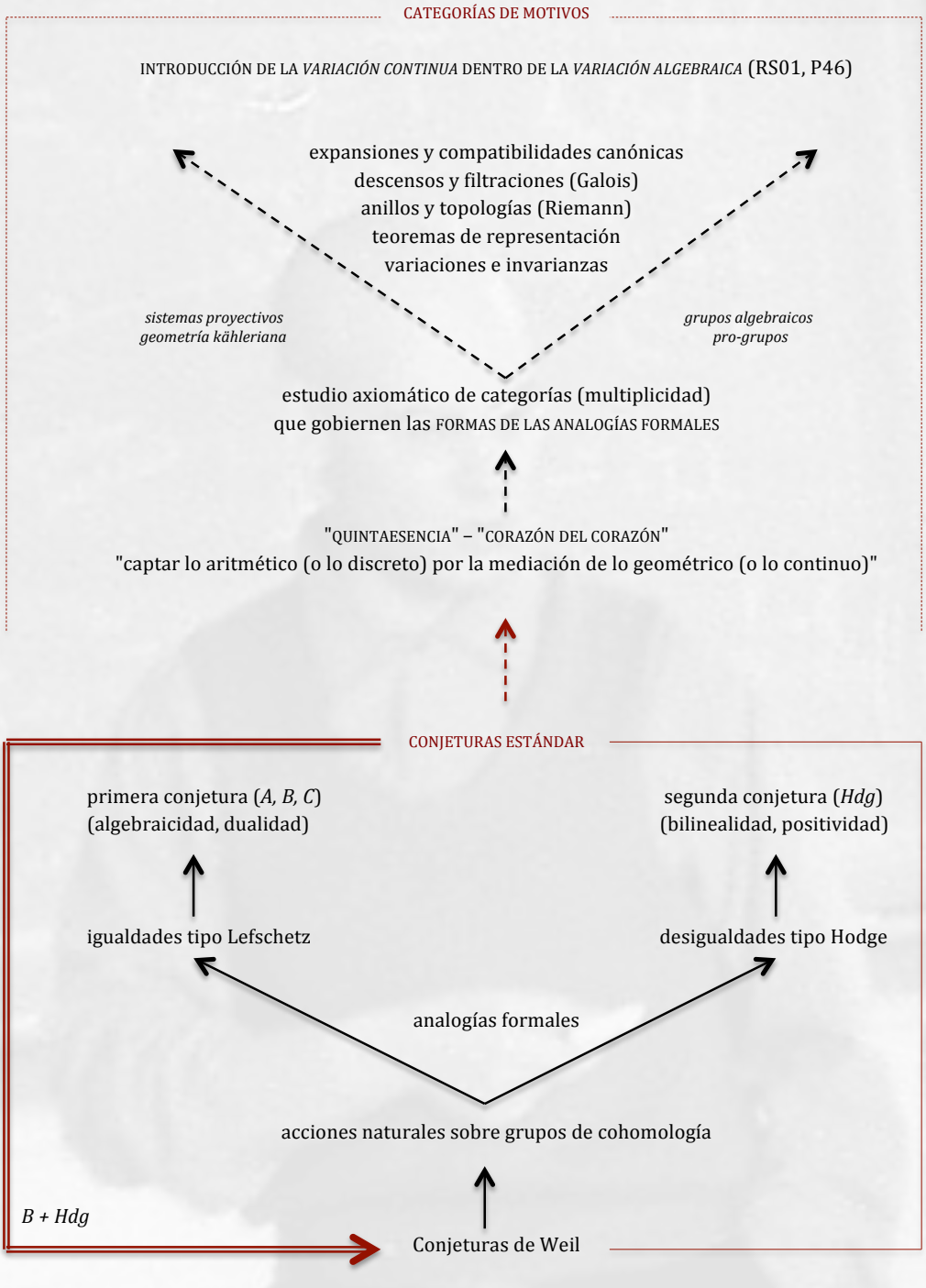
1968 **[1969] *"Standard conjectures on algebraic cycles"***, *en: Algebraic Geometry* (Tata Institute, Bombay Colloquium 1968), Oxford: Oxford University Press, 1969, pp. 193-199.

1986 **[1985-86] *Récoltes et Semailles***, manuscrito inédito.

[1985-86]	[RS01] (enero 1986). "Despejé, hacia el año 1968, una versión más fuerte y, sobre todo, más «geométrica» de las conjeturas de Weil" (P44). "Desarrollé esa idea (...) bajo el nombre de «teoría de motivos» o «filosofía (o yoga) de motivos» a lo largo de los años 1963-69" (P47). "El espíritu mismo de las conjeturas de Weil es expresar y captar lo «aritmético» (o lo «discreto») por la mediación de lo «geométrico» (o lo «continuo») (...) Mi reformulación consistió en despejar una suerte de «quintaesencia» (...) que llamé «*conjeturas estándar*» (...)" (P44). "El tema más profundo que he introducido en matemáticas es el de los *motivos* (él mismo nacido del «tema cohomológico *l*-ádico»), *corazón* o alma, la parte más escondida de los temas de esquemas (...) quintaesencia última (...) «*corazón del corazón*» de la nueva geometría" (P44-45). "(...) «*motivo* común» (o «*razón* común») subyacente a la multitud de invariantes cohomológicos diferentes asociados a la variedad (...) que serían como desarrollos temáticos diferentes, con su «tempo», «llave» y «modo» («mayor» o «menor»), a partir de un mismo «motivo de base» (llamado «teoría cohomológica *motívica*»)" (P46). "El motivo me parece ser el más profundo «invariante de la forma» que se ha podido asociar hasta el momento a una variedad algebraica, aparte de su «grupo fundamental motívico». Ambos invariantes representan para mí como las «sombras» de un «tipo de homotopía motívico» que faltaría por describir" (P47). [RS2] (abril 1986). "Los motivos: entierro de un nacimiento" (205) (decepción con Deligne). Producto de "años de gestación de una visión, fina y elusiva al comienzo, que se enriquece y se precisa a lo largo de meses y años, con esfuerzos obstinados", emerge el "yoga de los motivos, como aquel de mis «huérfanos» que más cercano estaba a mi corazón" – y que sus sucesores (Deligne en particuilar) presentan "como salido de la nada, sin alusión de paternidad" (206). Tres grandes sueños que impulsan el desarrollo de los motivos: (A) "Intuición de Serre" – "misterio a sondear": grupos profinitos discretos como base de un sistema proyectivo de grupos analíticos y algebraicos (206) – "como amo soñar (...) recuerdo haber entrado en ese misterio (...) por el mero hecho de la presencia de una categoría de motivos «lisos» sobre un esquema (...) con estructuras internas similares a las de la categoría de representaciones lineales de un pro-grupo algebraico" (206-207) –"aproximación a una teoría de Galois motívica", ligada estrechamente a grupos fundamentales de esquemas y al manejo de cohomologías como fibras y secciones – "recuerdo el placer y la maravilla" (207). (B) Procesos de descubrimiento: sueños, impresiones ("comentarios de Serre"), adivinanzas, coherencias, trabajo interior (208) – "filtraciones", "pesos" y comportamiento de las "seis operaciones" en la explicitación de las conjeturas estándar (209) – "nunca tuve la impresión de inventar, sino siempre de descubrir" (209). (C) "Matrimonio de los sueños precedentes" (A, B) – estudio de "las diferentes estructuras suplementarias que posee la categoría de motivos", "traduciendo" hechos sobre las representaciones lineales de grupos algebraicos (209) – "polarización de un motivo" ligada a "la idea de Serre (¡siempre él!) de un análogo «kahleriano» de las conjeturas de Weil" (209-210). Potencia del descubrimiento, nacimiento de una visión, armonía, realidad, trabajo (210-211). Paternidad y desarrollo de los motivos: Hilbert, Riemann, el Soñador (214), Grothendieck y alumnos (decepción con Deligne, aprecio de Saavedra) (211-214).
[1969]	"Enunciamos dos conjeturas sobre ciclos algebraicos que surgieron de un intento por entender las conjeturas de Weil (...) trabajadas hace tres años" – "La primera (...) formalmente análoga al teorema de estructura de Lefschetz (...) la segunda formalmente análoga a las famosas desigualdades de Hodge" (193). Correlaciones de las conjeturas con acciones naturales del endomorfismo de Frobenius (194). Motivación algebraico-aritmética y forma débil *C(X)* de la primera conjetura (194-195). Primera conjetura: *A(X)* (isomorfismo dual entre grupos de cohomología de una variedad *X* suave y proyectiva – generaliza prueba de Lefschetz para el caso de los complejos), *B(X)* (algebraicidad de adecuada operación en la teoría de Hodge), prueba de la equivalencia entre *A(X)* y *B(X)* (196). "Estabilidad" de *B(X),* integralidad de los coeficientes de la función Zeta a partir de la conjetura *B* – "Tengo una idea para una posible aproximación a la conjetura *B*" (197). Segunda conjetura: *Hdg(X)* (adecuada forma bilineal restringida a ciclos algebraicos es definida positiva) – indicación de prueba de que "*B(X)* y *Hdg(X×X)* implican, por ciertos argumentos de Weil y Serre (...) todas las conjeturas de Weil" (197). "Conclusiones. La prueba de las dos conjeturas estándar produciría resultados bastante más allá de las conjeturas de Weil. Formarían la base de la así llamada «teoría de los motivos», es decir una teoría sistemática de las «propiedades aritméticas» de las variedades algebraicas, encarnada en los grupos de clases de ciclos para equivalencia numérica. Tenemos por el momento solo una muy pequeña parte de esa teoría en dimensión uno, contenida dentro de la teoría de variedades abelianas. Al lado del problema de la resolución de singularidades, la prueba de las conjeturas estándar me parece la tarea más urgente de la geometría algebraica" (198).
[196?]	"Motivos - no distribuir - do not distribute" (1). Combinación de estrategias globales y locales a la Grothendieck: categoría abeliana de "motivos efectivos" asociada a un esquema noetheriano (1), variación de la categoría de motivos de acuerdo con variación del esquema (2), caso de variación vía límite inductivo (2), comparabilidades funtoriales y compatibilidades (2), casos aritméticos (3), expansión canónica a una categoría de motivos (3), funtores Hom (4), tipos de motivos (4), filtraciones (5-6), anillos de motivos (6-8), "interpretación topológica de los tipos dimensionales" (9), "homomorfismo fundamental" entre grupo generado por esquemas de tipo finito y motivos (9-10), preguntas sobre superficies (11), caracterizaciones "galoisianas" – "conjetura de Weil/Riemann" – "conjetura de Tate" (12), "promotivo fundamental" (13), "cohomología absoluta" y "teorema de dualidad absoluto" (13-15) [siguen otras 7 páginas de cálculos y preguntas cohomológicas].

Las referencias numéricas entre paréntesis corresponden a las páginas de los trabajos en cuestión.

Motivos de los MOTIVOS



Febrero 24
1970: entornos vital, metodológico y biográfico

(A). ENTORNO VITAL

(I) El péndulo de la acción y la elucubración

SURVIVRE ET VIVRE (1970-75)
Re-encuentro con la herencia vital y la acción alternativa de sus padres
- anarquismo, contra-cultura, liberación, vida comunitaria
- dinámica de la globalidad, ecologismo radical
- labor en pro de la humanidad

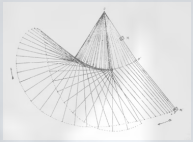
(II) El péndulo del individuo y el entorno

Re-traimiento progresivo del individuo e inserción introspectiva
- alejamiento de la comunidad matemática "estándar"
- acercamiento a jóvenes de provincia
- escape hacia la oscuridad

(B). ENTORNO METODOLÓGICO

(III) El péndulo de lo concreto y lo abstracto

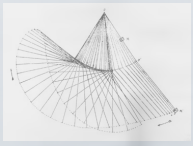
moduli de superficies de Riemann
Gal $(\bar{Q}:Q)$
dibujos de niños



anabelianidad
stacks
derivadores

(IV) El péndulo del corazón y la razón

descubrimiento
co/razón matemático(a)
sueño



invención
razón categórica
vigilia

ÉNFASIS PENDULARES DEL PERIODO 1970-1990
LOS BORDES DE LA EXPERIENCIA VITAL E INTELECTUAL
HACIA LA IZQUIERDA: ACCIÓN – INDIVIDUO – CONCRECIÓN – CORAZÓN

(C). ENTORNO BIOGRÁFICO (3ª parte: 1970-1990)

[referencias fundamentales: Scharlau, Jackson]

1965-70	Viajes humanitarios Argelia (Noviembre-Diciembre 1965) – Vietnam (Noviembre 1967) Rumania (Marzo 1968, Junio 1970)	
1970	Renuncia al IHES (cartas de Mayo 25, Junio 9) Escuela de verano en Montréal – Fundación de *Survivre* (Julio 20)	"Responsabilité du savant dans le monde d'aujourd'hui" (Conferencias: Orsay Junio 26, Montréal Julio 8 1970 – Manuscrito)
	Polémica en el ICM (Niza, Septiembre 1-4)	*Laudatio* de Hironaka - Panfletos de *Survivre*
1970-72	"Fui uno de los actores centrales en el grupo *Survivre et vivre*": organización, escritura de boletines, proselitismo	
	Profesor en el Collège de France (1970-72) (candidatura promovida por Serre)	"Allons-nous continuer la recherche scientifique?" (Conferencia: CERN Enero 27 1972 – Artículo *Survivre* #10)
	Profesor invitado en Kingston (Enero-Marzo 1971) Tour de veintena (!) de universidades (Marzo-Abril 1971): Stanford, Berkeley, UCLA, Princeton, etc. Profesor invitado en Buffalo (Mayo-Julio 1972) Encuentro con Justine Skalba	
1973	Profesor en la Universidad de Orsay Funda la comuna *Germinal* en Châtenay-Malabry Nacimiento (Octubre 28) de su último hijo John	
1973-79	Retiro en Villecun Relaciones estrechas con la comuna de Olmet Última conferencia en un Coloquio (París, Diciembre 12 1975)	
1979-91	Retiro en Mormoiron	
1973-84	Profesor en la Universidad de Montpellier (cursos de topología, geometría de superficies, teoría de grupos, etc.) Seminario avanzado y últimos tesistas doctorales (Sinh, Hakim, Ladegaillerie, Contou-Carrère)	*La longue marche à travers la théorie de Galois* [1981] *Pursuing stacks* [1983]
1984-88	Director de investigación en el CNRS (candidatura apoyada por Connes)	*Esquisse d'un programme* [1984]
	Recibe (con Deligne) el Premio Crafoord (1988) y lo rechaza	*Récoltes et semailles* [1985-86] *La clef des songes* [1987]
	Retiro oficial (Junio 10 1988)	*Les dérivateurs* [1990]

1991	Desaparición definitiva en los Pirineos	
1991-2014	Último periodo de Grothendieck (en Lasserre) Después de su muerte (Saint-Girons, Noviembre 13 2014) la comunidad queda a la espera de sus cajas de manuscritos	

Marzo 2 & Marzo 9
La larga marcha a través de la teoría de Galois

1981 (Enero-Junio) *La longue marche à travers la théorie de Galois*, manuscrito inédito, no destinado a publicación, *c.* 1600 pp. + 1000 pp. notas y *addenda*.

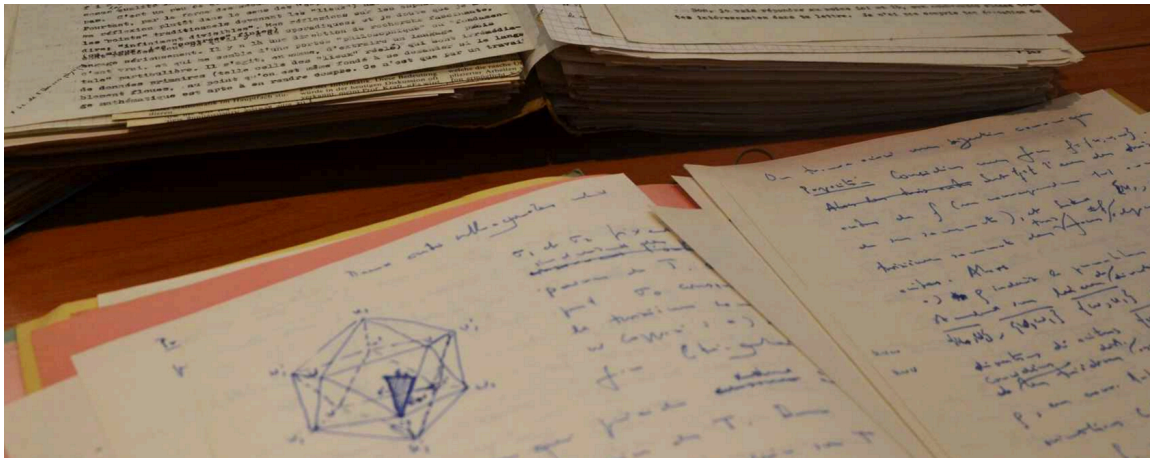
Transcripciones parciales:

- Tomo 1 §§1-37: *La longue marche à travers la théorie de Galois: transcription d'un manuscrit inédit* (ed. Jean Malgoire), Montpellier: Université de Montpellier, 1995, 253 pp.
- Tabla de Contenidos + Tomo 1 §§26-37 + Tomo 2 §49: pdfs en www.grothendieckcircle.org.

Descripción y breve estudio: Leila Schneps, "Grothendieck's «Long March through Galois Theory»", en: L. Schneps, P. Lochak (eds.), *Geometric Galois Actions. Around Grothendieck's Esquisse d'un Programme*, London: Cambridge University Press, 1997, pp. 59-66.

Algunas ideas centrales de *La longue marche à travers la théorie de Galois* se integran luego dentro de *Esquisse d'un programme* (1984). Ver más adelante en el Seminario, Abril 20-27.

Tabla de Contenidos	Primera Parte §§1-37: topos multigaloisianos, cubrimientos de topos, variaciones pro-multigaloisianas, "conjetura anabeliana fundamental", ajustes de hipótesis, analogía topológica ("donde el desorden de los grupoides puede expresarse completamente, en los casos anabelianos, por los grupos exteriores de lazos"), caso aritmético, digresión cohomológica, cubrimiento de huecos, torre de Teichmüller, espacios y grupos de Teichmüller, profinitud y discretización, enlace con el topos modular de Teichmüller, cambios de tipos, relaciones entre los espacios de Teichmüller ("donde se reconstituye *todo el topos étale* de una curva algebraica completa, a partir del π_1 de un abierto anabeliano"), isomorfismo entre el grupo de Galois absoluto y $T_{1,1}$, módulos de curvas elípticas vía Legendre. Segunda Parte §§38-53 ("carácter aún más exploratorio aún", según el transcriptor): relaciones y variados cálculos específicos asociados al caso $(g,n)=(0,3)$, grupos $M_{g,n}$ generales, esquemas en grupos, "la torre de Fermat", aproximaciones tipo Lie de sistemas Galois-Teichmüller, el grupo especial de Teichmüller $ST_{1,1}$. *Un nuevo estilo*: conjeturas, reflexiones, digresiones, ajustes, crítica, heurística, paráfrasis, cambios de notación, "peleas", cálculos, borradores...



Manuscritos de Grothendieck (Universidad de Montpellier): textos mecanografiados y textos manuscritos

estudio de variedad/esquema (ALG / NUM / GALOIS)
vía grupo fundamental topológico/algebraico (TOP / GEO / POINCARÉ)

Dado X esquema (automáticamente espacio topológico), considere el grupo fundamental de homotopía (Poincaré) $\pi^{top}_1(X, x)$ para algún punto $x \in X$ (si X es arco-conexo podemos olvidar el punto base x).
La compleción profinita de $\pi^{top}_1(X)$ es por definición el **grupo fundamental algebraico** de X (Grothendieck):
$\pi = \pi^{alg}_1(X) = compl\text{-}prof\,(\pi^{top}_1(X))$, grupo que clasifica lo *étale*:
π-órbitas finitas continuas ↔ cubrimientos *étales* de X.

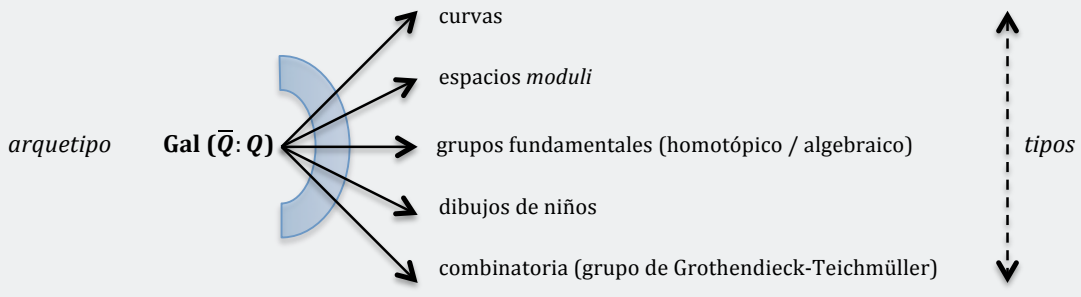
Ejemplo fundamental: X = plano proyectivo excepto tres puntos
El grupo de Galois absoluto Gal $(\overline{Q}: Q)$ actúa sobre $\pi^{alg}_1(X)$ y esconde fondos aritméticos profundos
(ver más adelante, "dibujos de niños").

Problema central del **álgebra topológica** (inversión):
¿cómo detectar/describir aquellas variedades X completamente caracterizadas por $\pi^{alg}_1(X)$?
Se trata, por definición, de las **variedades anabelianas**
(*geometría y aritmética codificadas en el grupo fundamental algebraico*)**.**
Conjeturas de Grothendieck:
(1) los espacios moduli $M_{g,n}$ deben constituir las variedades anabelianas sobre Q
(2) caso particular: las curvas hiperbólicas sobre campos de números son anabelianas.

[Mochizuki 1996] prueba (2) y se lanza luego a su programa de refundación de la "geometría aritmética".

GEOMETRÍA ANABELIANA

estudio del grupo de Galois absoluto (ALG / NUM / GALOIS)
vía acciones sobre objetos geométricos (TOP / GEO / RIEMANN)



TEORÍA DE GROTHENDIECK-TEICHMÜLLER

Algunas referencias a la *Longue Marche* (y a la *Esquisse*) en *Récoltes et semailles*

Dentro de los "doce temas maestros de mi obra":
"11. Yoga de geometría algebraica anabeliana, teoría de Galois-Teichmüller" [RS01, P21, Enero 1986]
"Los más profundos (a mis ojos) de esos doce temas, son el *de los motivos, y aquel estrechamente ligado de geometría algebraica anabeliana y del yoga de Galois-Teichmüller*" [RS01, P22, nota 23] (*cfr*. [RS3, 639])

"He recordado la reflexión matemática más larga que he perseguido en estos últimos catorce años, de enero a junio 1981, y que llamé «La larga marcha a través de la teoría de Galois». De hilo en hilo, tomé conciencia de que el sueño despierto que esporádicamente perseguía desde hace algunos años, que había terminado por llamarse «geometría algebraica anabeliana», no era más que una continuación, «una consecución última de la teoría de Galois, y sin duda en el espíritu de Galois». Cuando se me reveló esa continuidad, en el momento de escribir el pasaje del que extraigo la línea citada, una felicidad me atravesó, que no se ha disipado. Fue una de las recompensas de un trabajo realizado en una soledad completa." [RS1, 16, Febrero 1984]

Tomo 1 **§§26-37**	§26. "Grupos de Teichmüller profinitos (discretificación y prediscretificación)" (1-10). Grupo profinito a lazos (de tipo *(g,v)*), grupo de Teichmüller extendido, bases, discretificaciones, subgrupos de Teichmüller geométricos, grupos Γ_Σ (vía enlaces con automorfismos exteriores aritméticos), "determinar la indeterminación de manera precisa" (5), conjetura $\Gamma_{\boldsymbol{Q}} \approx \mathrm{Gal}(\bar{Q}:Q)$, conjeturas asociadas a la descripción del grupo absoluto como cociente. §27. "Cambios de tipo *(g,v)*" (10-17). Cocientes, bases, normalizadores, isomorfismos canónicos (en la red de los $\Gamma_{g,\nu}$). §28. "Cambios de tipo *(g,v)* (sigue)" (17-23). Enlaces entre discretificaciones, consecuencias sobre la red de los Γ_Σ, grupoides asociados, caso del grupoide de curvas aritméticas exteriores. §29. "Crítica de la aproximación anterior" (24-29). "La aproximación de los parágrafos anteriores parece finalmente muy brutal" (24), trabajo con subgrupos más pequeños, estructura simplicial de extensiones sucesivas (estructura en el infinito dentro del π_1 de multiplicidades modulares $\mathrm{M}_{g,\nu}$), descripciones estructurales (cocientes, transportes), categoría de recubrimientos universales con fibras grupoides (emergencia de los *stacks*). §30. "Propiedades de los $N_{g,\nu}$, $\Gamma_{g,\nu}$" (29-33). Acciones, centralizadores, subgrupos finitos, "conjeturas estándar topológicas" (32). §31. "Digresión sobre los elevamientos de una acción exterior de un grupo finito G sobre un grupo profinito a lazos π" (33-34). Problema de extensión de los desarrollos anteriores al caso profinito. §32. "Regreso sobre los aspectos aritméticos del llenar huecos: relaciones entre $\Gamma_{g,\nu}$ y $\Gamma_{g,\nu-1}$" (34-50). Límites proyectivos para una eventual representación fiel de $\Gamma_{\boldsymbol{Q}}$, equivalencias de categorías "aritméticas" y "algebraicas", reconstrucciones axiomáticas de las redes a partir de "datos puramente grupoidales y topósicos" (47), conjeturas provisorias, dudas, círculos viciosos. §33. "Digresión topológica: anti-involuciones de superficies orientadas algebroides" (50-66). Estudio y descenso a tierra de las construcciones anteriores, al mirar casos concretos: discos, esferas, cilindros, grupo modular, grupos dihedrales, etc. §33bis. "Estudio de recubrimientos finitos – relación entre los $N_{g,\nu}$ y $\Gamma_{g,\nu}$ para g variable" (66-69). "Se desearía ver lo que en el yoga anterior es independiente de toda conjetura" (67), "creo poder mostrar, gracias al resultado del ruso [Drinfeld] que me señaló Deligne, que $\Gamma_{\boldsymbol{Q}} \to \Gamma_{\mathbf{0,3}}$ es un isomorfismo" (68), "la cuestión esencial es caracterizar $\Gamma_{\mathbf{0,3}}$ algebraicamente, así como los $N_{g,\nu}$" (68) §34. "Descripción heurística profinita de la categoría de curvas algebraicas definidas sobre subextensiones finitas K de $\mathbf{C/Q}$" (69-72). Estudio de los puntos algebraicos de una variedad modular $M_{g,\nu}$ con grupos fundamental aritmético y geométrico dados. §35. "La inyectividad de $\Gamma_{\boldsymbol{Q}} \to \mathrm{Autext}_{\mathrm{lac}}(\hat{\pi}_{0,3})$" (72-77). Prueba del teorema enunciado vía el entendimiento preciso de $\hat{\pi}_{0,3}$ (Belyi). §36. "El isomorfismo $\Gamma_{\boldsymbol{Q}} \approx \Gamma_{1,1}$" (77-89). Acciones naturales fieles de $\Gamma_{\boldsymbol{Q}}$, presentaciones diversas de $\pi_{0,3}$, estudio del "topos modular $M_{1,1}$ clasificador de las curvas elípticas" (83). §37. "Teoría de módulos de curvas elípticas según Legendre (rigidifación de escala 2)" (89-110). Esquemas ligados al topos modular, enlace con Deligne-Mumford, recubrimientos galoisianos universales, "curva de Fermat" (107).
Tomo 2 **§49**	*Un nuevo estilo* *recorridos explícitos por los caminos de invención / descubrimiento* - multitud de cálculos específicos (*e.g.* numeración de 37 fórmulas en §49.I, 95 fórmulas en §49.I, etc.) - incesante vaivén reflexivo sobre el desarrollo del texto (retomas, rectificaciones, llamados de atención, etc.) - modificación progresiva de las hipótesis (inconvenientes, obstrucciones, generalizaciones, deducciones parciales, etc.) - búsqueda permanente de las notaciones más sencillas posibles (lucha entre lo particular y lo general, adecuaciones locales, etc.) "Retomemos la situación *ab ovo*" (7) – "Para una rectificación sistemática de las notaciones que siguen (...)" (7) – "Atención" (8, 83) – "Me parece que la introducción (...) no era muy juiciosa (...)" (9) – "No parece *a priori* que haya inconvenientes mayores en suponer (...)" (10) – "Debe poder sin inconveniente postularse la existencia de una escisión canónica (...)" (11) – "Tenemos casi (...)" (11) – "*Remordimiento*. Finalmente, en todos estos desarrollos, no se ha realmente utilizado la denominada «hipótesis fundamental» (...)" (16) – "Habría sido mejor (...)" (19) – "*Observación*. Al escribir las relaciones, resultaba evidente que las notaciones utilizadas en toda esta sección eran inadecuadas (...) pues me había inspirado del caso modular y no del caso universal (...)" (20) – "Me parece haber visto suficiente para poder retomar «a mano alzada» las construcciones anteriores y acabarlas, con notaciones más adecuadas" (36) – "Vamos a intentar salvar la apuesta (...)" (62) – "Me pregunto si (...)" (63) – "Me planteo la cuestión si (...)" (69) – "Sería tiempo de rectificar la confusión (...)" (79) – "Por lo tanto habría que introducir también, que lo queramos o no (...)" (80) – "Me doy cuenta de que estoy diciendo tonterías, al haber perdido un poco el contacto con el contenido geométrico de mis cálculos" (89) – "La obstrucción, como se debe (...)" (91) – "La obstrucción se interpreta (...)" (91) – "Recapitulación, refinamiento (...) habría más bien que *parafrasear* (...) dudo en introducir notaciones (...)" (102) – "La incomodidad resulta finalmente del hecho de que es demasiado grande (...)" (114) – "Podemos también hacer una *hipótesis* adicional (...)" (115) – "Tengo buenas razones para pensar que esa condición se satisface en todos los casos verdaderamente útiles" (115) – "¿Otra manera de proceder?" (116) – "Tal vez haya aún errores de orientación bastante groseros, que se rectificarán con el examen de casos particulares" (116) – "Este deshielo de los grupos da un poco de mal de mar" (117).

Las referencias numéricas entre paréntesis corresponden a las páginas de las transcripciones disponibles en www.grothendieckcircle.org

Abril 13
Pursuing Stacks

1983 (Febrero-Noviembre) *Pursuing Stacks (= À la poursuite des champs, Persiguiendo campos)*, manuscrito inédito, destinado en parte a publicación (*cfr.* p. 500). Incluye:

- Tres Cartas a Larry Breen (5 Febrero 1975, 17 Febrero 1975, s.f.), 37 pp.
- Carta a Daniel Quillen (Les Aumettes, 19 Febrero 1983), 23 pp.
- Tabla de Contenidos (25 Mayo 1983), 10 pp.
- Documento Principal (27 Febrero 1983 – 4 Noviembre 1983), 593 pp.

Recuperación de los textos, divulgación, transcripciones y digitalizaciones realizadas por Ronnie Brown y la escuela de Bangor (Gales).
Algunas ideas centrales de *Pursuing Stacks* se integran luego dentro de *Esquisse d'un programme* (1984). Ver más adelante en el Seminario, Abril 20-27.

Tabla de Contenidos	"The modelizing story (histoire de modèles)". *"I. Take-off".* §§1-13. De espacios a ∞-grupoides, modelos topológicos, amalgamación y pegamiento, reflexión sobre los términos "∞-grupoide" y "stack". *"II. Test categories and test functors".* §§14-44. Fallo de los fundamentos de la topología para expresar la intuición topológica, "stacks" como concepto unificador de homotopía y cohomología, categorías como modelos de tipos de homotopía, categorías modelo y sitios, categorías "test", modelizadores en (Cat), esfericidad, categoría de símplices. *"III. Homotopy structures and contractibility structures" (="Grinding my way towards canonical modelizers").* §§45-66. Nociones abstractas de homotopía, estructuras contractibles, categorías "conectadas", "un tímido comienzo de axiomatización de equivalencias débiles en (Cat)", revisiones de terminología y de orientación. *"IV. Aesphericity structures and canonical modelizers".* §§67-86. "Digresión sobre seis semanas de esbozos: *derivadores*", esfericidad, exactitud, inyectividad. *"V. Homology and cohomology (abelianization of homotopy types)".* §§87-102. Revisión de preguntas, programas a corto plazo, topos horizontales, verticales, proyectivos. *"VI. Homotopy properties of (Cat) and A^ (closed model structures)". "VII. Derivators". "VIII. Back to topoi"* [estas tres últimas partes no alcanzan a entrar en el documento; las secciones sobre la axiomatización homotópica de (Cat), los derivadores y los topos se desarrollarán en el volumen sobre los *Dérivateurs*, 1990]. Revisión del programa inicial. *"VI. Schematization."* §§103-132. Pseudo-topos, equivalencia débil, abelianización de un pseudo-topos, "soft versus hard" (468), haces, dualidad, "tratamiento perfectamente dual de cohomología y homología" (426), esquematización y linealización de tipos de homotopía, fibraciones, simetrías, cambios de base, conservatividad, teoría de la homotopía *at large*. "*VII. Linearization of homotopy types".* §§133-140. Grupoides y teoría de Teichmüller, seis operaciones y formalismo homológico en (Cat), suavidad en (Cat), prefiguración de *Récoltes et semailles* (592-593).
Carta a Quillen (= *I. Take-off*)	§1. "**Síntesis de álgebra homotópica y homológica, con énfasis especial sobre topos**", retrotraída a alrededores de 1966-67 (1); necesidad de una "**topología moderada**" (*tame topology*) de la misma importancia ("urgent and exciting") de los esquemas para la geometría algebraica (1). §2. "Intuición básica": **el estudio de los *n*-tipos de homotopía equivale al de los *n*-grupoides** (1'), vía la asociación de grupoides fundamentales a espacios (generalizando Poincaré); la relativización de un *n*-grupoide sobre un topos arbitrario (=*n-stack*) abre las puertas a una **cohomología no conmutativa** (1'); "heurística pura por el momento" (1'); "me guío sobre todo por la interpretación topológica" (2); un intento de axiomatizar la noción de ∞-grupoide (2-2') lleva a una cadena infinita de estructuras (3), que requiere el "descubrimiento de un simple principio guía" (3). §3. "Presumiblemente, **la categoría de ∞-grupoides es una «categoría modelo» para la categoría homotópica usual**" (3); intento de finalización de la carta (3'), pero continuación de la misma, ya que, "después de todo, la motivación topológica sí provee el «simple principio guía» deseado". §4. Esquema de estructuración de un ∞-grupoide (4-4'). §5. Descripción vía sucesión canónica $C_0 \to \dots C_n \to C_{n+1} \dots$ de categorías y funtores ["structure species" (6), recordatorio de las "espèces de structures" de Bourbaki], determinando en cada caso construcciones categóricas requeridas (productos, productos fibrados, límites, colímites) (5-5'). §6. La intuición topológica subyacente es la de "transponer" operaciones entre células de un complejo a operaciones entre objetos homotópicos (6). §§7-8. Estructura primitiva en los complejos celulares, procesos de descomposición y amalgamación (6'-7'); categoría C_0 (8). §§9-10. Paso inductivo: construcción $C_n \to C_{n+1}$ (8-8'); "**la ambigüedad está en la naturaleza de las cosas**" (8'); descripción explícita de la inducción (9-9'). §11. Descripción dual de un ∞-grupoide vía topología (10). §12. Co-∞-grupoides en (Top) (10'); "it's getting late and time to go to bed!" (10'). §13. Observaciones terminológicas sobre *n*-grupoides, ∞-grupoides, "stacks" – referencia a "Mme. Hoang Xuan Sinh" (11); *stacks* como "basic coefficient objects in non commutative homological algebra, as well as a convenient description of homotopy types"; "may be the theory is going to take off after all, in the long last!" (12).

Algunos pasajes del Documento Principal	§14. "Gruesa inadecuación" de la "transcripción" usual de la intuición topológica (1); topos, esquemas, topología *étale* son más apropiados para el desarrollo de una "teoría estructural de las estratificaciones" (1). §15. Explicación de las limitantes históricas de las aproximaciones lineales para el entendimiento de los espacios topológicos (2); emergencia de los *stacks* ("champs in French") para unificar y estabilizar la situación (3). §16. "**La noción de stack aparece aquí como el concepto unificador para una síntesis del álgebra homotópica y el álgebra cohomológica no conmutativa**" (6). §16bis. "**El hecho de que las categorías son objetos cómodos para definir tipos de homotopía arbitrarios es bastante notable** (...) objetos extremadamente simples y familiares (...) Lo que resulta más sofisticado es el proceso de localización hacia los tipos de homotopía, es decir, la descripción explícita de las equivalencias débiles" (8). §24. "Las reflexiones anteriores me convencen de que (1) **hay en efecto topologías en (Cat), adecuadas para describir los tipos naturales de homotopía de los objetos de (Cat)**, es decir de las categorías, y (2) no existe definitivamente una escogencia privilegiada para una tal topología" (23-24); consecuencia: aparente imposibilidad de reconstruir la "categoría homotópica usual (Hot)" a partir de una topología "natural" en (Cat) (24). §25. Pregunta esencial ("aún bastante vaga"): "**¿cuáles especies de estructuras algebraicas son adecuadas para expresar los tipos de homotopía?**" (25). §29. "El modelizador básico, en esta aproximación a modelos homotópicos, no es de ninguna manera la categoría (Semisimpliciales) (por más cómoda) o la categoría (Espacios) (por más cercana de la intuición topológica), sino la categoría (Cat) de «todas» las categorías (pequeñas)" (33). --- *La forma y el estilo*: **diario creativo**, flujo del pensamiento, rectificaciones, manuscrito tipografiado y corregido a mano, cambios de rumbo, ampliaciones... (sigue la orientación de *La larga marcha a través de la teoría Galois*, plástica y titubeante, en contraste con la arquitectónica rígida de EGA, SGA, *cfr*. p. 445). "Ímpetu fresco (...) mirada inocente (...)" (445), "un aire de la variada fragancia del mundo" (592). Trabajo/revelaciones en medio de la muerte (Ella, 491) y el nacimiento (Suleyman, 555) de sus nietos.
Cartas a Breen (pre-historia)	(I). 5 Febrero 1975. "Esos animales [2-categorías de Picard, *n*-categorías y otra fauna de ese género] son del todo indispensables para hacer matemáticas serias" (1); "la consideración de las *n*-categorías (...) me parece ser la llave del paso del álgebra homológica ordinaria («conmutativa») a un álgebra homológica no conmutativa, gracias a que provee una interpretación geométrica correcta de los «complejos truncados al orden *n*»" (3); "el contexto «natural» de los teoremas de cambio de base en cohomología *étale*, teoremas de tipo Lefschetz (...) es aquel de los *n*-campos [*n-champs*]" (5); "**yoga: una «*n*-categoría módulo *n*-equivalencia» es esencialmente la misma cosa que un «conjunto semi-simplicial módulo homotopía**» (5); "hay que **relativizar** todo el yoga encima de un topos arbitrario *X* (...) **poner en relación el álgebra homológica sobre *X* en términos de haces, con el álgebra categórica sobre *X* en términos de *n*-campos en grupoides**" (8); "la teoría de «**álgebra homológica no conmutativa**» que intento sugerir podría definirse, vagamente, como el **estudio paralelo** de las nociones siguientes y sus múltiples relaciones: *(a)* espacios topológicos, topos, *(b)* conjuntos semi-simpliciales, haces semi-simpliciales, *(c)* *n*-categorías (en especial *n*-grupoides), *n*-campos (en especial, *n*-campos en grupoides) etc. *(d)* complejos de grupos abelianos, haces abelianos etc. (...) Se trata por tanto de álgebra, con la presencia constante de motivaciones provenientes de la intuición topológica. Si una tal teoría debiese ver el día, necesitaría un nombre, me pregunto si «**álgebra topológica**» no sería el más adecuado" (9). (II). 17 Febrero 1975. "Las construcciones sobre un topos *X* que se pueden hacer en términos de *(n-1)*-stacks *localmente* constantes dependen sólo de sus «*n*-truncados tipos de homotopía»" (1); "puede darse explícitamente la cohomología de un *n*-grupoide" (3); "hay esencialmente tres aproximaciones distintas para construir la **cohomología de un topos**: *(a)* punto de vista de complejos de haces, resoluciones inyectivas, categorías derivadas (*álgebra homológica conmutativa*), *(b)* punto de vista a la Cech o semi-simplicial (*álgebra homotópica*), *(c)* punto de vista de los *n*-stacks (álgebra categórica, o *álgebra homológica no conmutativa*). En *(a)* se «resuelven» los coeficientes, en *(b)* se resuelve el espacio base, en *(c)* no se resuelven ni el uno, ni el otro" (5). (III). Sin fecha (1975). "Mi gran ignorancia de la topología algebraica y la homotopía" (1); "yoga conjuntos simpliciales ↔ ∞-grupoides" (2); "libro de Mme. Sinh" (2); "yoga según el cual «el carácter trascendente de un grupo formal se concentra esencialmente en el grupo conmutativo formal», descubierto al parecer por Dieudonné" (3); "se podrían unir, en una categoría derivada apropiada, la dualidad de Serre, la dualidad de Pontriagin (...) y la dualidad de Cartier" (8); "el **«tipo fino de homotopía» de un espacio moderado** [dentro de la «tame topology», i.e. "donde se eliminan los fenómenos salvajes" (18)] encarna el conocimiento, no sólo de los haces o los *n*-stacks, sino (vía paso al límite inductivo) el conocimiento de *todos ellos*" (20); "todas las operaciones cohomológicas posibles e imaginables ya están incluidas en los datos provistos por un sistema de *n*-categorías" (21); "¿cuál es esa maravillosa fórmula de Bloch-Quillen a la que usted alude, que no conozco, y con la que se me hace agua a la boca?" (22).
Carta a Serre (pre-pre-historia)	Noviembre 5 1959. "Cada vez que, en virtud de mis criterios, una variedad de módulos (o mejor, un esquema de módulos) para la clasificación de las variaciones (globales o infinitesimales) de ciertas estructuras (variedades completas no singulares, fibrados vectoriales, etc.) no puede existir, a pesar de eventuales buenas propiedades de lisura, propiedad y no singularidad, la razón se debe solo **a la existencia de automorfismos de la estructura que impide funcionar la técnica de descenso**". [*Correspondance Grothendieck-Serre*, SMF, 2001, p. 94].

Las referencias numéricas entre paréntesis en la *Tabla de Contenidos*, la *Carta a Quillen* y el *Documento Principal* corresponden a la numeración del propio Grothendieck.
Las referencias numéricas entre paréntesis en las *Cartas a Breen* corresponden a la paginación separada de cada carta. Todas las negritas son nuestras.

FUERZAS CENTRALES EN *PURSUING STACKS*

def. (actual) STACK = funtor $E \to C_T$ donde:

- el funtor es fibrado (los morfismos en C_T se *relevan* canónicamente a E)
- las fibras $C_T/_U$ (preimágenes del funtor sobre objetos U de C_T) son *grupoides*
- el funtor "cambio de base" $C_T/_U \to Con$ es un *haz*
- C_T es una categoría C con una *topología de Grothendieck* T
- los cubrimientos en las fibras se *relevan* ("los datos de descenso son efectivos")

ejemplos esenciales:

- C_T = categoría de esquemas afines sobre un esquema S fijo, con la topología *étale*
- $E = M_{1,1}$ espacio *moduli* de curvas elípticas (Mumford, 1965)
- $E = M_{g,n}$ espacio *moduli* de superficies de género g con n puntos (Grothendieck, 1981)

desarrollo de los STACKS

(hacia aritmética + Langlands) — **TEORÍAS DE LA CLASIFICACIÓN** — (hacia física + HoTT)

NO CONMUTATIVIDAD (GRUPOIDE FUNDAMENTAL)

TEORÍA FINA DE ESPACIOS MODULI [Laumon 2000] — TEORÍA HOMOTÓPICA DE CATEGORÍAS [Maltsiniotis 2005]

categorías algebraicas	categorías analíticas	*n*-categorías
bases		
variedades algebraicas esquemas	variedades diferenciables espacios topológicos	1-stacks = stacks 0-stacks = haces
STACKS ALGEBRAICOS	STACKS TOPOLÓGICOS / DIFERENCIABLES	*n*-STACKS

emergencia terminológica STACKS (= CHAMPS) (Deligne-Mumford 1969)

tránsito final (ideas de Grothendieck)

(4) se integra toda la información de variación y pegamiento en los ***haces***

(3) aparecen entonces naturalmente los ***grupoides*** en los problemas de clasificación

(2) la clasificación de esas estructuras (*espacios moduli*) debe tener en cuenta las variaciones (Riemann)

(1) muchas estructuras poseen *grupos de automorfismos no triviales* (interés de la *ambigüedad* - Galois)

obstrucción inicial

Abril 20 & Abril 27
Esbozo de un programa

1983 Carta a Faltings (Junio 27 1983), 10 pp.

Transcripción (alemán) en L. Schneps & P. Lochak, *Geometric Galois Actions I*, Cambridge: Cambridge University Press (LMS Series 242), 1997, pp. 49-58; traducción al inglés, *ibidem*, pp. 285-293.

El "desarrollo de la potencia visionaria en matemáticas" requiere penetración [*insight*], profundidad, delicadeza, y "emerge de la niebla" a partir de una "delicada y obstinada sensación de los conceptos y entidades relevantes y sus relaciones mutuas" (1). "El «yoga de los motivos» (...) es una suerte de ciencia secreta – Deligne me parece ser aquel más fluyente en ella" (1). "Yoga" de la geometría anabeliana, problema general (2), caracterización de anabelianidad en el caso curvas por la negatividad de la característica de Euler (3), caracterización de anabelianidad en el caso $\boldsymbol{C}$ por hiperbolicidad (3). Variedad anabeliana general como fibración de curvas anabelianas (3). "Estoy bastante convencido de que los espacios moduli $M_{g,n}$ pueden ser aproximados como «anabelianos»" (3). "No me he ocupado de este conjunto de preguntas desde hace más de un año" (3) [*i.e.* desde la *Longue marche*]. Caracterización de las variaciones de campos mediante variaciones de los grupos fundamentales, gracias a su "rigidez" interna, o, equivalentemente, gracias a la "fuerza" de su acción aritmética externa (4-5). Emergencia del grupo de Galois absoluto $\mathrm{Gal}(\overline{\boldsymbol{Q}}:\boldsymbol{Q})$ como objeto central [*Grundobjekt*] de la geometría algebraica anabeliana (5). Anabelianidad y topos *étales* (7). Relaciones del programa anabeliano con la conjetura de Mordell (8). Ideas estimuladas por "algunas reflexiones trascendentales sobre la acción de grupos *finitos* sobre curvas complejas algebraicas y sus recubrimientos universales" (9). Después de inicios "durante la primera parte de 1981 (...) retomé las reflexiones anabelianas de nuevo entre Diciembre 81 y Abril 82" (9). Registro de trabajos en anabelianidad, espacios de Teichmüller y "fundamentos de la cohomología con respecto al álgebra homotópica" [i.e. *Pursuing Stacks*] (9).

Las referencias numéricas entre paréntesis remiten a la paginación del documento original, indicada en los márgenes de la traducción inglesa.

1984 ***Esquisse d'un programme*** ("Esbozo de un programa") (Enero 1984), manuscrito inédito, programa de trabajo destinado a su ingreso al CNRS (reclutado 1984-1988, apoyo en particular por Connes), 57 pp.

Transcripción (francés) en L. Schneps & P. Lochak, *Geometric Galois Actions I*, Cambridge: Cambridge University Press (LMS Series 242), 1997, pp. 5-48; traducción al inglés, *ibidem*, pp. 243-283.

"1. ENVÍO" (1-2). "Dos voluminosos cartones de notas manuscritas" [¿*Longue marche* + *Pursuing stacks*?] (1); "trabajo de descubrimiento (...) pensamiento que sondea y que descubre andando a tientas en la penumbra" (1); "el esbozo que sigue sobre algunos temas de reflexión de los últimos diez o doce años tendrá lugar a la vez de esbozo de programa de trabajo para los años venideros" (1).

"2. UN JUEGO DE «LEGO-TEICHMÜLLER» Y EL GRUPO DE GALOIS DE $\overline{\boldsymbol{Q}}$ SOBRE $\boldsymbol{Q}$" (2-9). Estudio de la "intuición geométrica y topológica de las formas, y más particularmente de las formas bidimensionales (...) que se pueden agrupar bajo la apelación de «**topología de las superficies**» o «**geometría de las superficies**»" (2); "ha sido mi **principal fuente de inspiración**, así como mi hilo conductor constante" (3); "con sorpresa y maravilla a lo largo de los años descubrí (o más bien, sin duda, redescubrí) la **riqueza prodigiosa**, realmente inagotable, la profundidad insospechada de ese tema, de apariencia tan anodina" (3). Estudio del "sistema de *todas* las multiplicidades $M_{g,n}$ ligadas entre ellas por un cierto número de operaciones fundamentales" (4); estudio "reflejado por una estructura análoga sobre los grupoides fundamentales correspondientes, los «**grupoides de Teichmüller**» (...) de manera suficientemente intrínseca para que el **grupo de Galois Γ de $\overline{\boldsymbol{Q}}/\boldsymbol{Q}$ opere sobre la «torre» de los grupoides**" (4); así "*el grupo de Galois Γ se realiza como un grupo de automorfismos de un grupo profinito muy concreto*" (4). La acción de Γ sobre la torre puede ser descrita por su acción en los primeros niveles (5-6); importancia de ir más allá del grupo fundamental con un punto de base, y pasar a **grupoides fundamentales** con "todo un paquete [de puntos] que sea invariante para las simetrías de la situación" (5) [*tema recurrente: back-and-forth de lo Uno a lo Múltiple*]; "**tierra virgen** (...) **verdadera joya**" (6). Aparición esencial del grupo modular en la base de la torre (6); "*doce «piezas de construcción» fundamentales* (6 de género 0, 6 de género 1) en un «juego de Lego-Teichmüller»" (8); cercanía con el "juego de «cirugía geodésica hiperbólica» de Thurston" (8); aparición de un "juego de vaivén típico entre lo combinatorio y lo algebraico complejo (o mejor, lo algebraico sobre $\boldsymbol{Q}$)" (9).

"3. CUERPOS DE NÚMEROS ASOCIADOS A UN DIBUJO DE NIÑOS" (9-18). "Mi interés por las superficies topológicas comienza a surgir en 1974" (9); tesis doctoral de Yves Ladegaillerie (9-10); trabajo de DEA de Jean Malgoire y Christine Voisin (11); estudio de la categoría de mapas $X\backslash K$ (X superficie compacta, K complejo topológico sumergido en X) (10) y descubrimiento de que los mapas pueden ser descritos mediante **recubrimientos de la esfera de Riemann** (11); "se llega a una constatación que ocho años después me parece aún siempre tan extraordinaria: ¡**todo mapa orientado «finito» se realiza canónicamente sobre una curva algebraica compleja**!" (11). "Naturaleza familiar, no técnica, de los objetos considerados, **dibujos de niños**" (12); "a un tal dibujo se le asocian sutiles invariantes aritméticos" (12). Aparición del grupo de Galois Γ (=$\mathrm{Gal}(\overline{\boldsymbol{Q}}:\boldsymbol{Q})$) "como agente transformador sobre formas topológico-combinatorias de la naturaleza más elemental posible" (13); "mi reflexión se encaminó muy rápido hacia una dirección más conceptual para llegar a aprehender la naturaleza de esa acción de Γ (...) y así mi atención se dirigió hacia lo que he llamado desde entonces «***geometría algebraica anabeliana***»" (14); aparición de "grupos fundamentales que están muy alejados de los grupos abelianos (y que por esta razón he llamado «***anabelianos***»)" (14). **Teorema de Belyi** (1979) ("*identidad profunda entre la combinatoria de los mapas finitos, por*

una parte, y la geometría de las curvas algebraicas definidas sobre cuerpos de números, por otra parte") (15) y enlace con el programa de geometría anabeliana (15). Referencia a la *Longue marche*, "esfuerzo de comprensión de las relaciones entre grupos de Galois «aritméticos» y grupos fundamentales profinitos «geométricos»" (15). **Enlace entre la geometría anabeliana y la teoría de Galois-Teichmüller**, a través de las "multiplicidades modulares $M_{g,n}$ que aparecen como los primeros ejemplos importantes, en dimensión >1, de variedades (o, más bien, multiplicidades) que parecen merecer la apelación «anabeliana»" (16). "Riqueza verdaderamente inimaginable de un grupo anabeliano típico como el grupo $SL(2,\boldsymbol{Z})$ (...) «piedra de construcción» fundamental de la «torre de Teichmüller»" (16). "**Yoga anabeliano** (...): **una curva algebraica anabeliana sobre un cuerpo de números K (extensión finita de Q) se conoce módulo isomorfismo cuando se conoce su grupo fundamental mixto**" (17). "Hay quienes, ante esto, se contentan con levantar los hombros (...) Olvidan, o ignoran, que nuestra ciencia, y cualquier ciencia, sería bien poca cosa si desde sus orígenes no hubiese estado nutrida por los **sueños** y las **visiones** de aquellos que se entregan a ella con **pasión**" (18).

"4. POLIEDROS REGULARES SOBRE CAMPOS FINITOS" (18-25). Problematización del caso infinito en el caso de mapas "regulares" (correspondientes a "recubrimientos *galoisianos*") (18); trabajos de fundamentos de Malgoire y Voisin (19). "En 1977 y 1978, paralelamente a dos cursos C4 sobre la geometría del cubo y aquella del icosaedro, comencé a interesarme por los poliedros regulares" (19); "la teoría de los polígonos regulares en característica arbitraria fue el objeto de un curso de DEA en 1977/78" (20). "La extensión de la teoría de los poliedros regulares (y, más generalmente, de toda suerte de configuraciones geométrico-combinatorias, aún los sistemas de raíces...), desde el campo de base $\boldsymbol{R}$ o $\boldsymbol{C}$ hacia un anillo de base general, me parece de un **alcance comparable,** en esta parte de la geometría, a la extensión análoga que ha tenido lugar desde el comienzo del siglo en geometría algebraica, o desde hace unos veinte años en topología, con la introducción del lenguaje de los esquemas y los topos" (20). "Ampliación del punto de vista (...) pequeño milagro (...) despejar un manto de brumas (...) fuerza de motivación y fascinación poco comunes, como la del sueño tal vez (...) **llamado de lo informulado, de lo informe que busca forma, de un entrevisto elusivo** (...)" (23-24).

"5. *HARO* SOBRE LA TOPOLOGÍA DICHA «GENERAL», Y REFLEXIONES HEURÍSTICAS HACIA UNA TOPOLOGÍA DICHA «MODERADA»" (25-36). "Necesidad de fundamentos nuevos para la topología «geométrica», en una dirección muy diferente de la noción de topos, y aún independiente de las necesidades de la geometría algebraica denominada «abstracta» (sobre campos y anillos de base generales)" (25). "El problema de partida, que comenzó a intrigarme hace ya unos quince años, era el de definir una **teoría de descomposición [*dévissage*] de las estructuras estratificadas**" (25); inspiración y motivación de las multiplicidades modulares $M_{g,n}$ en "mi reflexión sobre las estructuras estratificadas, de diciembre 1981 a enero 1982" [¿desliz de fechas? - no concuerda con las fechas de *La longue marche* - ¿referencia a otro manuscrito?] Estudio de **categorías isotópicas** en el problema de "tornar canónico aquello que no lo es" en las cuestiones de *dévissage* (27); necesidad de solventar "fenómenos «salvajes»" en cocientes, bordes, proyecciones (28); necesidad de introducir una "«**topología moderada**»" (29) dirigida al "estudio de *propiedades topológicas de formas geométricas* diversas" (29), en contraste con la "«*topología general*» (desarrollada en los años treinta y cuarenta) *por analistas para las necesidades del análisis*" (29). Lucha en contra de la "inercia casi insuperable del espíritu" (30). "Aproximación axiomática" de la topología moderada (30); consecuente aparición "no de *una* «teoría moderada», sino de una vasta infinitud" (30), ligada por **teoremas de comparación isotópica** (31). "Lo que hace falta, otra vez, no es para nada la virtuosidad técnica de los matemáticos, a veces impresionante, sino la audacia (o simplemente la **inocencia**)" (32). Aparición de "una noción de grado de trascendencia (o «dimensión») de un punto en un espacio moderado, cercano de la noción familiar en geometría algebraica" (33) [prefiguración de la noción de dimensión en las teorías O-minimales posteriores de la teoría de modelos]. Importancia de los "sueños" y del "trabajo de fundamentos" en la "expresión de una **realidad palpable**" (34). Las multiplicidades deben estudiarse sobre categorías de índices (35); la teoría del *dévissage* resulta ser una "guía preciosa" para el entendimiento de la torre de Teichmüller (35). "He podido convencerme que un tal formalismo de *dévissage* tiene un sentido en el contexto (¡denominado «abstracto!») de los **topos generales**" (36). "La comprensión de la estructura topológica de los esquemas no ha progresado mucho desde el trabajo de Artin-Mazur" (36).

"6. «TEORÍAS DIFERENCIABLES» A LA NASH Y «TEORÍAS MODERADAS»" (37-42). Teoremas de *dévissage* para teorías moderadas (37); "canonicidad" asociada a descomposiciones en espacios contraíbles (38); isotopía y anabelianidad (39). "Fundamentos de la topología moderada": necesidad de un "trabajo tenaz, meticuloso, sin duda de largo respiro" (39-40). Siguiendo "las ideas de Nash, que me habían golpeado mucho (...) ¿a fines de los años 60?", estudio de "una **axiomatización de «variedad lisa»** y del formalismo diferenciable sobre esas variedades" (= teoría lisa) (40); axioma de "estabilidad por continuación analítica" (41); conexiones entre sistemas de gérmenes de funciones analíticas y teorías lisas (41); conexiones entre variedades para teorías lisas y espacios con topologías moderadas (42).

"7. A LA BÚSQUEDA DE LOS CAMPOS" (42-45). "Desde el mes de marzo del año pasado, es decir desde cerca de un año, la mayor parte de mi energía ha estado consagrada a un trabajo de reflexión sobre los ***fundamentos del álgebra (co)homológica no conmutativa***, o lo que es lo mismo, finalmente, del *álgebra homotópica*" (42). Recuento de la escritura: notas destinadas a la publicación (Hermann), trabajo en curso de redacción, amplitud del manuscrito (1500 pp.), dos volúmenes esperados ("*À la poursuite des champs*") (43); recuento de intentos (Verdier, Giraud, Illusie, Quillen) en esa fundamentación, "no entendidos" y que "esperan aún un lenguaje preciso y plástico para darles forma" (43-44). Referencia a las cartas a Larry Breen (1975) y cómo "en ese momento aparece la intuición que **los ∞-grupoides deben constituir modelos, particularmente adecuados, para los tipos de homotopía, correspondiendo los *n*-grupoides a los tipos de homotopía truncados** (con $\pi_i = 0$ para $i>n$)" (44); referencia a los trabajos de Ronnie Brown y al "estímulo de una correspondencia agitada" con Brown (44); emergencia del término "**campo**" (44). Referencia a "última conferencia pública, en el IHES en 1976, cuyo manuscrito, confiado no sé a quien, se ha perdido" (45), donde ya intuía una "«esquematización» de los tipos de homotopía" (45). Se trata de "un cuento de las mil y una noches, donde la atención se mantiene en suspenso a través de otros veinte cuentos antes de conocer el fin del primero" (45).

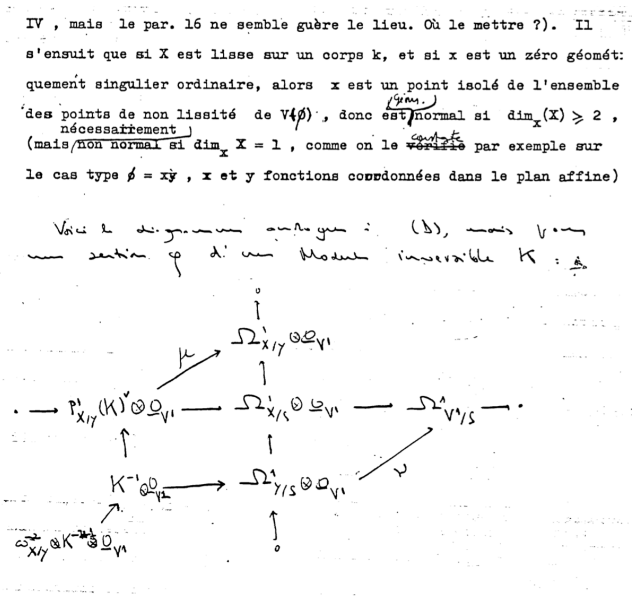
"8. DIGRESIONES SOBRE GEOMETRÍA BIDIMENSIONAL" (45-49). Estudio de tres temas en "geometría topológica bidimensional" (45): *(i)* "polígonos planos" y variedades modulares asociadas (46), *(ii)* "curvas sumergidas en una superficie" y "visión dinámica de las configuraciones posibles, con el paso de una a otra por deformaciones continuas", llevando a una propiedad de "«telescopía»" en la inmersión del círculo en una superficie (46-47), *(iii)* "clasificación topológico-combinatoria de sistemas de rectas" y aparición de un "objeto notable" en cuestiones de clasificación: "suerte de «superficie modular» asociada a un sistema de pseudo-rectas" (47-48). Constatación de soledad (46), falta de alumnos (47) y "nivel de cultura muy modesto de casi todos los alumnos que han trabajado conmigo en estos últimos diez años" (48). Búsqueda de "*métrica riemanniana canónica*" en el estudio de mapas bidimensionales (48).

"9. BALANCE DE UNA ACTIVIDAD DOCENTE" (49-50). La enseñanza universitaria (Montpellier) aportó "una renovación de mi aproximación de las matemáticas" (49), pero "constato un fracaso claro y nítido en mi actividad docente" (49); solo dos discípulos entre el 74 y el 76: Yves Ladegaillerie y Carlos Contou-Carrère (49).

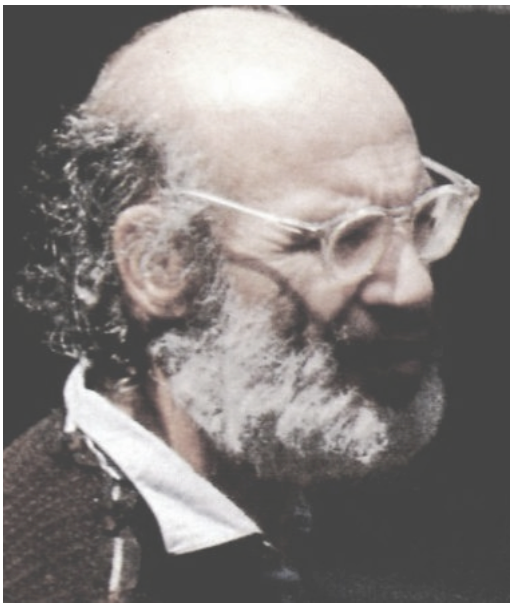
"10. EPÍLOGO" (50-51). La solicitud de entrada al CNRS "ha sido para mí la ocasión de escribir este esbozo, que de otra manera sin duda nunca habría visto el día" (50); "diez años de trabajo no serían demasiados para llevar a cabo algunos de los mínimos temas esbozados (...) ¡y cien años serían pocos para el más rico de entre ellos!" (51); "un lector atento percibirá como yo una **unidad profunda**" (51); "la geometría de superficies (...) representa una renovación pero de ningún modo una ruptura. Más bien, muestra el camino de una nueva aproximación hacia esa realidad aún misteriosa, aquella de los «motivos», que me fascinaba más que cualquier otra" (51). "Ya no soy, como antes, el prisionero voluntario de tareas interminables" (51); "**el tiempo de las *tareas* para mí ha terminado. Si la edad me ha aportado algo, es ser más ligero**" (51). Una nota final (pie de página 51) remite a la *Esquisse Thématique* (1972) donde Grothendieck había resumido sus trabajos hasta ese momento.

"NOTAS" (52-57). *Nota 1* (52): importancia de las conjeturas aparentemente "fuera de alcance"; nueva conjetura sobre el programa anabeliano. *Nota 2* (52-53): recordatorio de Maria, en el campo de Rieucros, quien le enseña a los doce años la definición de círculo; "en ese momento, creo, es cuando vi por vez primera la potencia creativa de una «buena» definición matemática, de una *formulación* que describe la esencia. Aún hoy, me parece que la fascinación que ejerció en mí esa potencia no ha perdido nada de su fuerza" (53). *Nota 3* (53-54): "**la geometría algebraica anabeliana (...) ignora los anillos y las ecuaciones algebraicas que sirven tradicionalmente para describir los esquemas, al trabajar directamente con sus topos *étales*, expresables en términos de grupos profinitos**"; "el desarrollo de una tal traducción de un «mundo geométrico» (a saber, esquemas, multiplicidades esquemáticas, etc.) en términos de un «mundo algebraico» (grupos profinitos y sistemas de grupos profinitos, derivados de topos *étales* convenientes) puede ser considerado como el **logro último de la teoría de Galois**, sin duda en el espíritu mismo de Galois" (53) [*cfr. Récoltes et semailles* 1, 16]. *Nota 4* (54-55): reflexiones sobre el grupo modular y las representaciones motívicas de Gal($\overline{\boldsymbol{Q}}$:$\boldsymbol{Q}$) ("comenzadas en 1981"); **temas principales a desarrollar en la geometría algebraica anabeliana**: *(a)* "construcción combinatoria de la Torre de Teichmüller", *(b)* "descripción del grupo de automorfismos de la compactificación profinita de la torre, y reflexión sobre una caracterización de Gal($\overline{\boldsymbol{Q}}$:$\boldsymbol{Q}$) como subgrupo de este", *(c)* "la «máquina de motivos» *SL(2,**Z**)* y sus variantes", *(d)* "el diccionario anabeliano y la conjetura fundamental", *(e)* "problema de Fermat" (55). *Nota 5* (55): ciclotomía y teoría combinatoria del bi-icosaedro ligadas al entendimiento de Gal($\overline{\boldsymbol{Q}}$:$\boldsymbol{Q}$). *Nota 6* (55-56): "unos fundamentos más apropiados para la topología no suprimirán esos fenómenos [salvajes, con su razón de ser y su propia belleza], pero nos permitirán **situarlos en su justo lugar, como «casos límite» de fenómenos de la «verdadera» topología**" (56). *Nota 7* (56-57): despliegues, estratificaciones, fibras, bordes, enlaces, junturas en un sistema de espacios moderados.

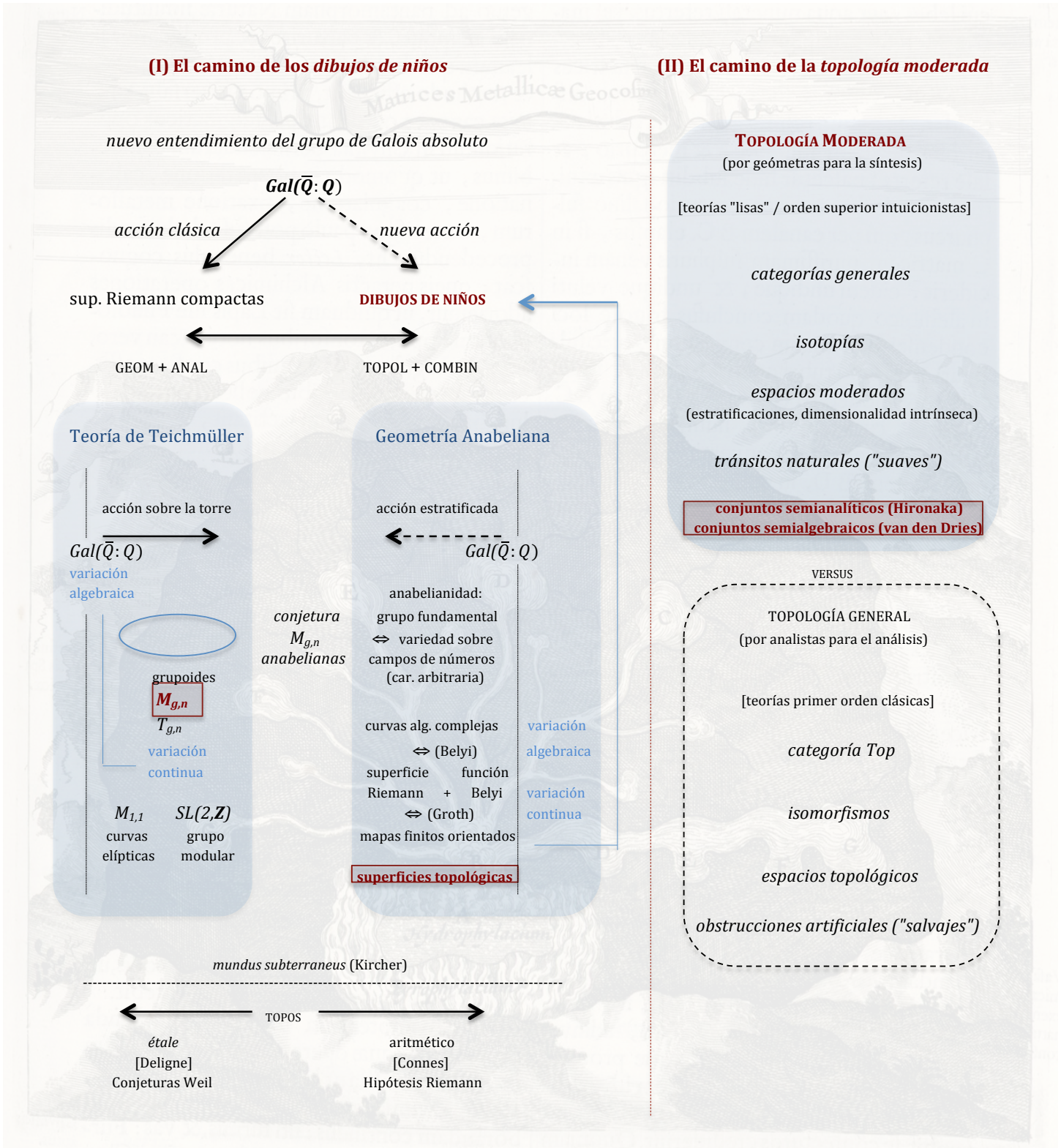
Las referencias numéricas entre paréntesis remiten a la paginación del documento original, indicada en los márgenes de la transcripción francesa (cursivas y «entrecomillados» de Grothendieck; nuestras negritas).


IV , mais le par. 16 ne semble guère le lieu. Où le mettre ?). Il
s'ensuit que si X est lisse sur un corps k, et si x est un zéro géomét:
quement singulier ordinaire, alors x est un point isolé de l'ensemble
des points de non lissité de V(f), donc est (forcément) normal si $\dim_x(X) \geqslant 2$,
nécessairement
(mais non normal si $\dim_x X = 1$, comme on le ~~vérifie~~ par exemple sur
le cas type $f = xy$, x et y fonctions coordonnées dans le plan affine)

Manuscrito 1987 (preparatorio a EGA5)



Mediados de la década de los ochenta


(I) El camino de los *dibujos de niños*
(II) El camino de la *topología moderada*
nuevo entendimiento del grupo de Galois absoluto
$Gal(\bar{Q}:Q)$
acción clásica
nueva acción
sup. Riemann compactas
DIBUJOS DE NIÑOS
GEOM + ANAL
TOPOL + COMBIN
Teoría de Teichmüller
Geometría Anabeliana
acción sobre la torre
$Gal(\bar{Q}:Q)$
variación algebraica
grupoides
$M_{g,n}$
$T_{g,n}$
variación continua
$M_{1,1}$ curvas elípticas
$SL(2,\mathbf{Z})$ grupo modular
conjetura $M_{g,n}$ *anabelianas*
acción estratificada
$Gal(\bar{Q}:Q)$
anabelianidad:
grupo fundamental
⇔ variedad sobre campos de números (car. arbitraria)
curvas alg. complejas
⇔ (Belyi)
superficie Riemann + función Belyi
⇔ (Groth)
mapas finitos orientados
superficies topológicas
variación algebraica
variación continua
mundus subterraneus (Kircher)
TOPOS
étale
[Deligne]
Conjeturas Weil
aritmético
[Connes]
Hipótesis Riemann
TOPOLOGÍA MODERADA
(por geómetras para la síntesis)
[teorías "lisas" / orden superior intuicionistas]
categorías generales
isotopías
espacios moderados
(estratificaciones, dimensionalidad intrínseca)
tránsitos naturales ("suaves")
conjuntos semianalíticos (Hironaka)
conjuntos semialgebraicos (van den Dries)
VERSUS
TOPOLOGÍA GENERAL
(por analistas para el análisis)
[teorías primer orden clásicas]
categoría Top
isomorfismos
espacios topológicos
obstrucciones artificiales ("salvajes")

Mayo 11
Los derivadores

1990-91 *Les dérivateurs*, manuscrito inédito (octubre 1990 - mediados 1991), 1976 pp.

Transcripción (francés) por Matthias Künzer, edición y revisión de Georges Maltsiniotis y Jean Malgoire, disponible en www.grothendieckcircle.org.

Cap. 1 Generalidades sobre los (pre)derivadores (126 pp.)
Cap. 2 Cofinalidad (a derecha e izquierda) (preliminar a la cofinalidad cohomológica) (99 pp.)
Cap. 3 *Hom* externos en los derivadores (12 pp.)
Cap. 4 Diagramas substanciales (83 pp.,1-72 ausentes)
Cap. 5 Categorías de caminos y localización (52 pp.)
Cap. 6 HOT (204 pp.)
Cap. 7 Categorías de caminos (2) (171 pp.)
Cap. 8 1-tipos de homotopía relativos: su integración... (9 pp.)
Cap. 9 Regreso sobre las categorías MW^{-1}, comparación con Quillen (25 pp.)
Cap. 10 Comparación de *Cat* con Δ^ (5 pp.)
Cap. 11 Fibraciones HOT, funtores propios y funtores lisos, etc. (136 pp. 1-126 ausentes)
Cap. 12 Caracterización de W_∞. Funtores *W*-propios, *W*-lisos, etc. Sumas amalgamadas y cuadrados *W*-cocartesianos en *Cat* (275 pp.)
Cap. 13 Categorías de modelos (1) (98 pp.)
Cap. 14 Cuadrados h-cartesianos y h-cocartesianos (8 pp.)
Cap. 15 Teoremas de factorización (modelos (2)) (137 pp.)

[capítulos 16-19, por transcribirse aún, a fecha Mayo 2016]

Cap. 16 Localizadores fundamentales en *Cat* (124 pp.)
Cap. 17 Categorías con fibraciones y cofibraciones (modelos (3)) (118 pp.)
Cap. 18 Categorías y conjuntos accesibles (492 pp., 1-49 ausentes)
Cap. 19 Modelos (4) (50 pp.)

1991 (Abril 2, Les Aumettes) *Carta a Thomason*. Grothendieck resume algunas de las ideas esenciales de *Los derivadores*:

- desarrollo de un "álgebra topológica" general bajo un amplio "fundamento de la teoría de categorías" (2)
- búsqueda de "estructuras intrísecas" (2), "esencias últimas" (9), "quintaesencia" (11), subyacentes a categorías homológicas y homotópicas
- aparición en SGA5 de la idea de *derivadores*: axiomas apropiados para las propiedades funtoriales asociadas a categorías derivadas (5)
- nociones fundamentales del "álgebra topológica": derivador, topos, *n*-categoría, *n*-campo, para poder captar *Cat* con "ojo de geómetra" (6)
- derivadores / categorías de modelos = estructuras / bases : el *carácter intrínseco de los derivadores* calca la independencia de cambios de base (11)

Las referencias numéricas entre paréntesis remiten a la transcripción del documento, disponible en www.grothendieckcircle.org

Les dérivateurs: algunos temas escogidos

Cap. 1. Cuadro intuitivo (1.1): "categoría de coeficientes" *A*, "categoría de índices" *I*, topos de prehaces $A(I) = A^{I^{op}}$, cambio de base *f: I→J*, y problemática de existencia de adjuntos (izquierda, derecha) para $f^*: A(J) \to A(I)$. Cuadro general: definición de *derivador* como 2-funtor *D*: $Dia^{op} \to Cat$ (*Dia* subcategoría plena de *Cat* = "diagramas") que "satisface ciertas condiciones" (1.4) [un tal funtor se denominará luego "prederivador" (1.22) y los axiomas para los derivadores irán apareciendo *a medida* que el texto se desarrolla *naturalmente* (1.5, 1.9, 1.22, 1.23-25)]. "La filosofía de los derivadores consiste en gran medida" en responder cómo ciertos diagramas en "categorías de coeficientes" *D(I)* provienen *inversa y canónicamente* de otros diagramas (1.7). "Intuitivamente, se mira un derivador *D* como una categoría [de base] fundamental con una «estructura» suplementaria, a saber las «extensiones» [de la base]", de manera funtorial; emerge entonces un *vaivén global-local* entre coeficientes (1.10). Aparición "estándar" de los derivadores vía *localizaciones* (1.10). Ejemplo esencial: derivador HOT elevado sobre la "categoría homotópica estándar" *Hot*, categoría base de "coeficientes fundamentales" (1.11). "Filosofía": los funtores entre categorías fundamentales, subyacentes a derivadores, deben provenir *de manera canónica* de morfismos entre derivadores (1.14). Las notas a pie de página (agregadas *después* de avances y retrocesos en el texto principal) indican "errores" (1.22), "inutilidades" (1.24), "falsedades" (1.25-27, 1.52), "mejoras" (1.31), "contraejemplos" (1.53), "dudas" (1.65): reflejos de la *labor creativa en acción* de Grothendieck. Enlace entre condiciones de *suavidad* –morfismos propios y lisos (1.30)– y propiedades de *estabilidad* en cambios de base (1.32). Descomposición globular de la esfera a través de conjuntos ordenados y categorías (1.57-58). Desarrollo parcial del documento fechado 11 Noviembre 1990 (1.66).

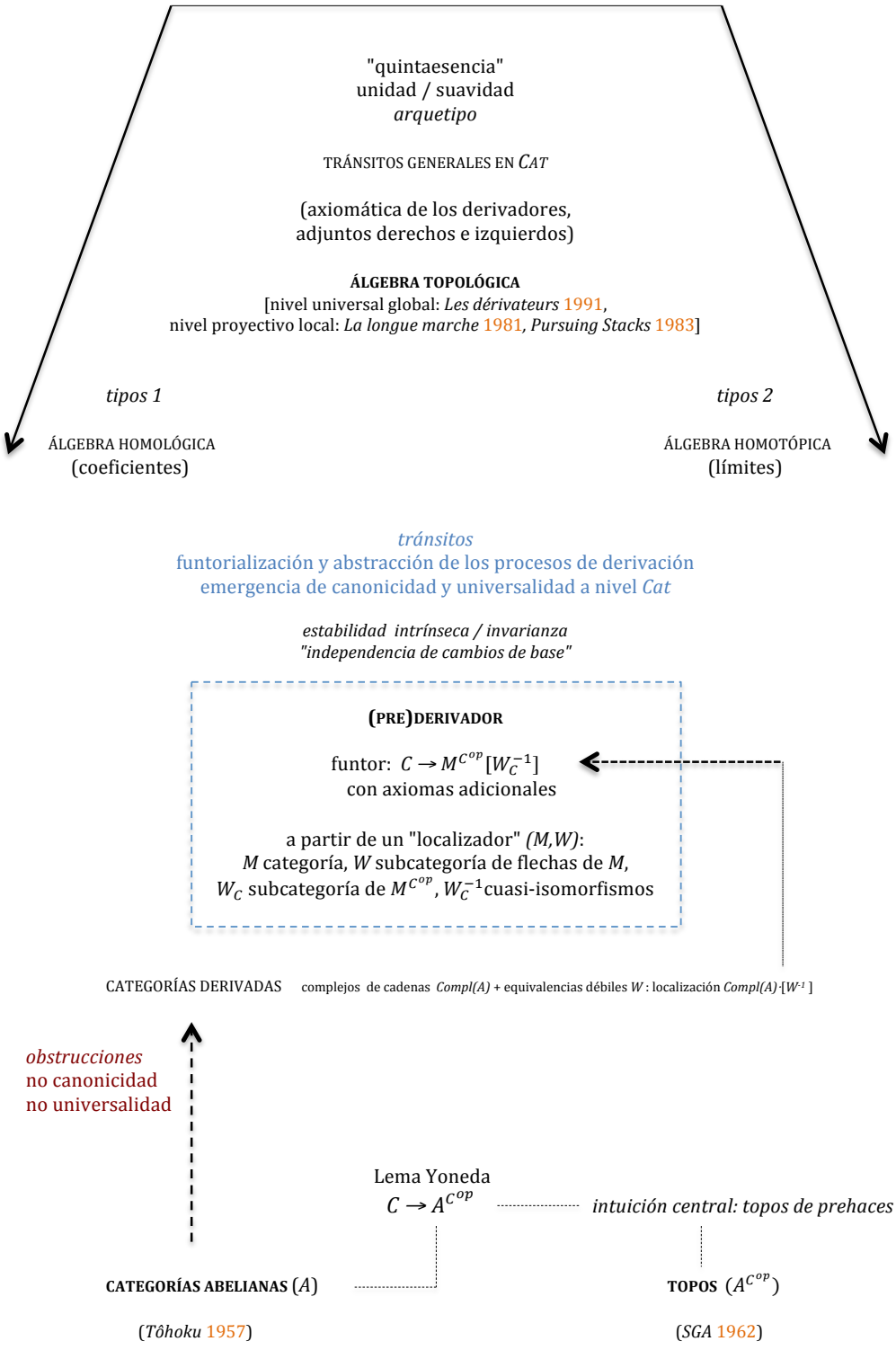
Cap. 3. Acciones eventuales de *Hot* sobre la categoría fundamental de un derivador (5.1). Correlaciones entre *Cat* y *Hot*; localización módulo cuasi-isomorfismos (5.2). Carácter especulativo del capítulo: ¿"nuevo axioma"? (5.3), "heurística" (5.6), "no hay duda, debe funcionar" (5.6), dudas: ¿"corrección"? (5.7), ¿"verdad"? (5.8), confianza relativa: "O.K." (5.8). Ejemplo: funtores asociados al "tipo de homotopía del círculo estándar" (5.3).

Cap. 5. Categorías abstractas de caminos (5.1-4). Enlaces con categorías de fracciones (5.5, 5.17, 5.20). *Cat hot*, categoría de categorías *módulo homotopía* (5.8): intento de presentación vía "demostración conceptual, sin «cálculos» fastidiosos" (5.9) [recordar la frase de Galois: "hay que saltar a pies juntillas sobre los cálculos"].

Cap. 11. Fibraciones de tipo *Hot* en *Cat*: utilizando técnicas de *haces*, correspondencias entre preservación de *Hot*-equivalencias y preservación de fibras bajo cambios de base (11.1-3). "Para poner resultados «topológicos» sobre una base sólida, hay que desarrollar las nociones pertinentes de funtor propio, funtor liso, etc., sin referencia a una teoría HOT. Es lo que por otro lado había intentado hacer ya en 1983, por los tiempos de *Pursuing Stacks*, pero sin una redacción en forma" (11.6).

Las referencias numéricas entre paréntesis (*x.y*) remiten a la paginación de la *transcripción*, señalando capítulos (*x*) y páginas (*y*).

ALGUNAS FUERZAS CENTRALES EN *LOS DERIVADORES*



Mayo 18

El método: regreso a (Cosechas y siembras) + (La llave de los sueños)

---

década de los ochenta - comienzos de los noventa
vaivén pendular



(A) GRANDES PROGRAMAS DE RENOVACIÓN MATEMÁTICA

1981 *La longue marche à travers la théorie de Galois*
1983 *Pursuing stacks*
1984 *Esquisse d'un programme*

1990-91 *Les dérivateurs*

(B) REFLEXIONES PROFUNDAS

1983-86 *Récoltes et semailles*
1987 *La clef des songes*

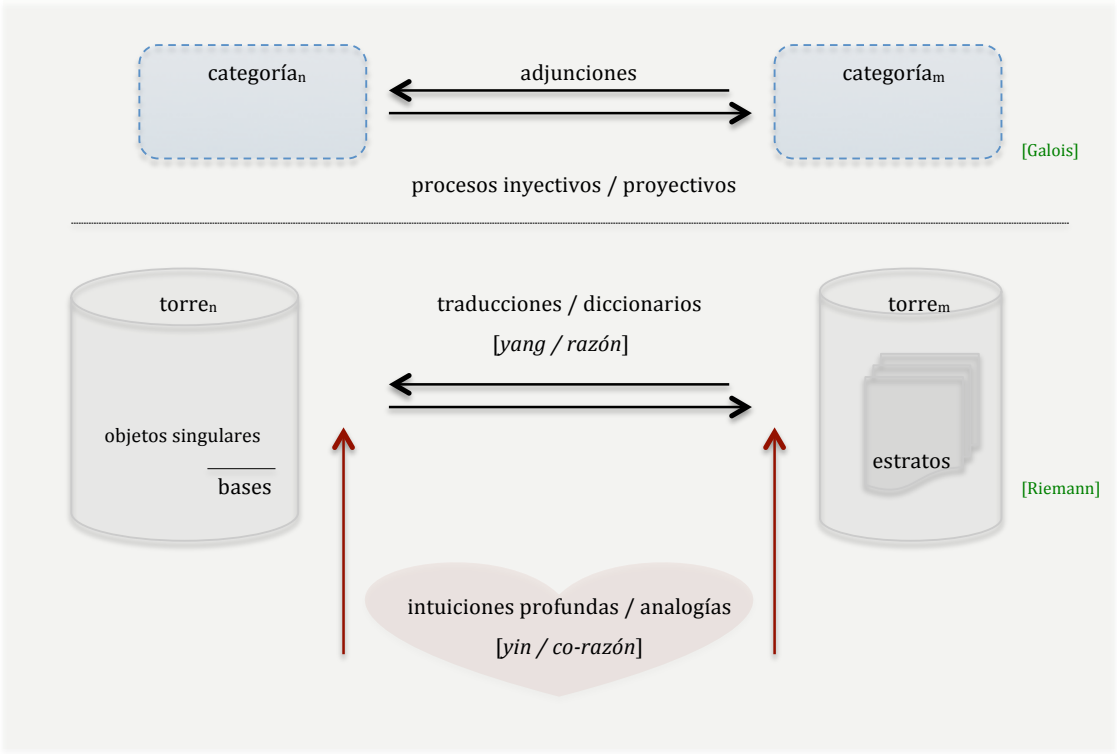
Registro (exhaustivo) de apariciones de temas (A) en RÉCOLTES ET SEMAILLES
(los números indicados en la tabla remiten a los volúmenes y páginas del tratado– ver p. 172 de este Seminario)

TORRE DE TEICHMÜLLER	GEOMETRÍA ANABELIANA	DIBUJOS DE NIÑOS	*n*-GRUPOIDES *n*-CATEGORÍAS	TOPOLOGÍA MODERADA	ÁLGEBRA TOPOLÓGICA
RS01(21-22): tema central (no. 11); tema profundo RS01(45): tema profundo RS2(196): "el objeto más rico y fascinante que he encontrado en matemáticas" RS2(266): teoría de "dévissage" RS2(342): conexión con Mumford RS2(391): inicios en el Seminario Cartan (1961), exposiciones sobre espacios analíticos RS2(412): microseminario (1981) para Leroy y Contou-Carrère	RS01(21-22): tema central (no. 11); tema profundo RS01(45): tema profundo RS1(16): "logro último de la teoría de Galois" RS1(142): cercanía con conjeturas aritméticas RS2(342): "alcance excepcional" RS2(400): yoga fundamental RS3(600): cercanía tardía con Fermat RS3(639): "parte neurálgica" RS4(1160): su "alma", el yoga de los motivos	RS2(247): "continente nuevo"	RS2(194): "joyas únicas" RS2(386): dimensiones arbitrarias en topos RS3(574): importancia de las ampliaciones de un contexto RS4(1205): "síntesis" – "el cuadro de naturaleza puramente algebraica más vasto para dejar obrar la intuición topológica"	RS01(21): tema central (no. 10) RS01(36): "metamorfosis de la noción de espacio" RS01(55-56): extensión de estructuras, neonato "ilegal" RS2(392): variaciones de suavidad RS3(639): renovación entera para la topología, "del alcance de los esquemas en geometría algebraica" RS4(1037): cercanía con temas de constructibilidad y coherencia en los años cincuenta	RS01(21): tema central (no. 9) RS2(198): "máquina de fabricar categorías derivadas" – "objeto más rico" RS2(386): "fundamento conceptual común al álgebra homológica y al álgebra homotópica" RS4(1205): derivadores, ideas presentes desde los años sesenta

Registro (parcial) de procedimientos de la obra grothendickiana, alegorizados en los inicios de LA CLEF DES SONGES

(los números indicados remiten a páginas en el tratado)

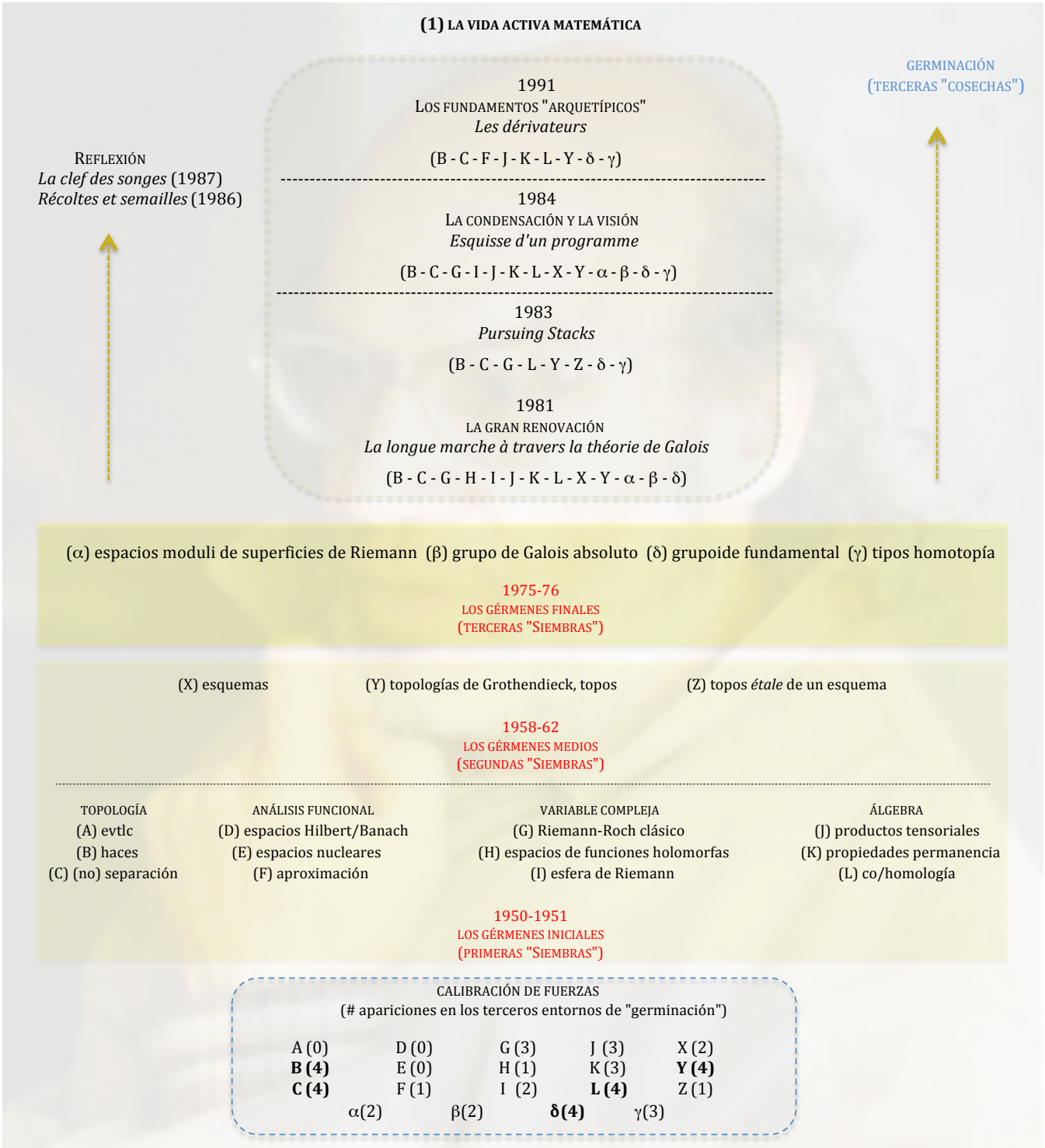
RELATIVIZAR	MULTIPLICAR	ESTRATIFICAR	UNIFICAR	DESPEJAR (="dégager")
pensar sobre *bases movibles*: flechas verticales, transformaciones variaciones → invarianzas	allende objetos "en sí", pensar objetos *"en múltiple"*: urdimbres, multiplicidades inyecciones → proyecciones	elevar una *arquitectónica natural de tipos y niveles*: truncamientos, correspondencias traducciones → reflejos	*estructurar y axiomatizar* la multiplicidad de variaciones: categorías de coeficientes, categorías coma topos → *n*-categorías	trascender ciertas *obstrucciones singulares*: acceso universal a *tránsitos suaves* particular → general
(8): allende nuestra inercia, importancia del cambio – "gran miedo del cambio" (21): enlace movible entre razón y corazón, descripción y fe – importancia del "oído espiritual" (23): conciencia del "allende" – "cosas delicadas y elusivas, cosas de la sombra y la penumbra" (39): lucha contra "resistencias enormes de inercia" – "rayos de genialidad" vistos como cambios de base (42): estudio de *todas las capas* de la psiquis, cada una con "su propia coloración y resonancia"	(6): multitud (cerca de un millar) de sueños anotados entre 1976 y 1986 (26): penetración de una cosa en "capas y estratos sucesivos" – acceso a la novedad "al tocar fondo" – recorrido *yang* a través de una multiplicidad de umbrales (31): "cuatro tiempos que marcan los ritmos de la creación": preparación, concepción, trabajo, consecución (35): múltiples ciclos de Eros, medidas del ritmo creador	(1): *sondeo de las profundidades* (el "alma", "el otro yo", "el niño en mí") – pasaje de "umbrales" (2): importancia de los *sueños* como "testimonio directo" de los niveles del inconsciente (10): escritura racional de los estratos de sueños irracionales (11): la "otra voz", "esencial", "delicada": sin-razón, co-razón, in-seguridad (22): valor de los "grandes sueños" que permiten "saltar" entre niveles de conciencia	(16): "el acto de conocimiento completo (...) es un acto *común* entre Dios y alma" (18): unidad del Soñador y del yo – "connivencia" de esa cercanía en los sueños (25): "trabajo de *profundización*, de *penetración* de la periferia hacia las profundidades" (27): penetración del espíritu en "capas superpuestas" – acceso al inconsciente – imersión *yin* hacia una unidad profunda (30-31): *unidad triádica* y "arquetipo común" de los procesos creativos: sensibilidad, intelectualidad, espiritualidad	(3): "somos ciegos" – "pero hay un *Ojo* que ve, una *Mano* que pinta" (4): "aparecemos como soñadores, o mejor, *soñados*" (7): "percibo un *soplo* (...) nada mecánico, que no viene de mí" (12): voz del "Soñador", de la "Madre", de "Eros": "leche verdadera" de lo profundo (23): "el comienzo, la esencia, del acto creador es esquivo. Escapa siempre a las manos burdas de la razón, y a su red, el lenguaje" (39): trabajo de "limpieza" – debemos despejar los pesos agobiantes de toda una vida



Mayo 25

Diagramas de la creatividad en Grothendieck

Tercer periodo (1981-1991)



(2) LAS TENSIONES METODOLÓGICAS

(A)

NUEVO ESTILO:

DIARIOS DE TRABAJO PLÁSTICOS (YIN), NO ARQUITECTÓNICOS (YANG)

- lugar al error, a la corrección, a la variación progresiva de los ajustes
- espacios abiertos: descubrimiento/invención + reflexión

(B)

ACCESO DIRECTO A OBJETOS ARITMÉTICO-GEOMÉTRICOS RICOS:

REENTENDIMIENTO DE NÚMERO/ESPACIO DESDE LA PROFUNDIDAD DE LO CONCRETO

- espacios moduli de superficies de Riemann
- grupo modular / grupo de Galois absoluto
- variable compleja y torre de Teichmüller
- superficies topológicas
- dibujos de niños

(C)

ACCESO UNIVERSAL/ARQUETÍPICO A LA HOMOTOPÍA:

TRÁNSITOS AXIOMÁTICOS EN CAT DESDE LA PROFUNDIDAD DE LO GENÉRICO

- truncamientos y localizaciones*: n*-grupoides, *n*-tipos de homotopía, *n*-stacks
- suavizaciones y globalizaciones: derivadores

(D)

COINCIDENTIA OPPOSITORUM

"ver *Cat* con ojo de geómetra"

CAT-GEOM

particular (B) ← → general (C)

tensión / armonización / suavización entre los opuestos