Incontro con Fernando Zalamea

IN VISTA DELL'INCONTRO DEL 15 DICEMBRE 2019

Egidio Meazza

1. Matematica e altre forme di conoscenza

Vorrei, prima di tutto, considerare un carattere che differenzia la conoscenza matematica da quella delle scienze della natura; queste hanno a che fare con la realtà, mentre la prima con oggetti ideali; se le scienze trovano gli oggetti della loro indagine nel mondo materiale, la matematica si dà, più o meno autonomamente, i propri oggetti. Ciò non significa che non sia l'esperienza vivente nel mondo a spingere il matematico alla creazione delle sue teorie o, anche, le sollecitazioni che provengono dalle stesse scienze della natura a volgerlo verso determinati campi d'indagine. Per esempio, l'esigenza di approntare un apparato matematico per la descrizione della relatività generale, ha portato a notevoli sviluppi nel campo del calcolo tensoriale, in cui mi piace ricordare il lavoro di due matematici italiani, Gregorio Ricci Curbastro e Tullio Levi-Civita, suo allievo, quest'ultimo purtroppo sospeso dall'insegnamento dopo l'approvazione, nel 1938, delle famigerate leggi fasciste sulla razza. Ma anche nel caso di una "collaborazione" dei matematici con gli scienziati della natura, l'applicazione delle teorie alla descrizione dei fenomeni è affare degli scienziati, che hanno un decisivo punto di riferimento nell'empirico: esperimenti che decidano dell'inapplicabilità di una teoria matematica ad un certo ambito della natura non pregiudicano affatto la validità di detta teoria, se essa è formulata in modo coerente. Ad esempio, pare che la geometria dello spazio reale, non sia euclidea, ma questo non significa che la tradizionale geometria sia *sbagliata*: essa resta comunque una potente teoria, ben formulata, valida da un punto di vista matematico, anche se non adatta alla sua applicazione a diversi ambiti dell'esperienza.

Questa differenza comporta un diverso modo di accumulazione delle conoscenze: teorie scientifiche confutate dall'esperienza vengono abbandonate, escono per così dire dal patrimonio di conoscenze delle scienze, e mantengono al massimo un valore di documento storico, che permette di apprezzare l'evoluzione del pensiero nello sviluppo di un determinato campo d'indagine; ad esempio la teoria del flogisto nel dar conto dell'infiammabilità delle sostanze non ha più alcun ruolo nella chimica. Nella matematica, invece, nessuna teoria viene abbandonata: il suo campo di conoscenza si amplia con il procedere della ricerca, senza tralasciare nessuna delle sue precedenti acquisizioni, e questo perché la matematica è indipendente dall'esperimento, i suoi oggetti sono ideali. Mi piace ricorrere ad una metafora "abitativa"; se consideriamo il complesso delle conoscenze come un territorio abitato, possiamo dire che le conoscenze delle scienze della natura hanno un aspetto nomade: nel corso dello sviluppo le scienze occupano sì un terreno sempre più ampio, ma si spostano abbandonando lo spazio che avevano occupato un tempo, sul quale rimangono al massimo dei ruderi di interesse archeologico, parti di costruzioni abbandonate non più utilizzabili. Le conoscenze della matematica, invece, le chiamerei stanziali, paragonabili al territorio di una città in espansione: le nuove teorie sono come nuovi quartieri che si aggiungono ai precedenti e forniscono a volte nuove vie di collegamento ai vecchi, rendendo più facile l'accesso.

Se nessuna delle teorie matematiche – di quelle di cui si è accertata la consistenza – è *sbagliata*, allora nel procedere della ricerca matematica c'è qualcosa di simile all'operatività artistica: anche l'opera d'arte non è mai *sbagliata*: ciò che la contraddistingue è la sua efficacia. C'è anche qualcos'altro degno di nota; dice il professor Zalamea che le teorie logiche vengono dopo la matematica, non possono pretendere ad un ruolo di fondazione: si è visto che la ricerca di un fondamento assoluto delle matematiche è destinato all'insuccesso (Gödel): ogni teoria può essere giustificata in una teoria più ampia, ma questa, a sua volta, ne richiede una più vasta per la sua giustificazione e così via. La matematica può operare benissimo senza fondamenti, anche per essa ciò che conta è l'efficacia; pure in questo aspetto c'è una somiglianza con l'arte: l'artista non ha bisogno di fondare la sua opera su una qualche teoria, anzi, spesso le teorie artistiche vengono formulate dopo che gli artisti hanno prodotto le loro opere.

2. Le nuove prospettive della matematica

Semplificando molto, mi sembra di poter cogliere la differenza fondamentale tra il modo nuovo di impostare la ricerca matematica, rispetto a quello precedente, in questi termini: mentre fino a gran parte del XX secolo il punto di partenza era il numero (di conseguenza la teoria cantoriana degli insiemi e la logica classica che la sorreggeva) con il suo carattere discreto, a partire dal lavoro di alcuni matematici temporalmente più vicini a noi, più o meno a partire dalla seconda metà del secolo scorso, il punto di inizio si può collocare nella geometria e nel continuo (topoi) con la logica adatta ad esso, quella intuizionista.

Qui si presenta un problema: che cos'è il continuo? Come può essere definito? La domanda va intesa in senso socratico: non si chiede un esempio di continuo, ma proprio che cosa è. O forse non dobbiamo pretenderne una definizione, ma semplicemente affidarci ad un'intuizione e lavorare a partire da essa. In fondo anche il significato di insieme – tanto per buttare la palla nell'altro campo – non è definito se non in modo vago, facendo appello alla sua intuibilità. Ma ora vorrei rilevare il fatto che le teorie matematiche, anche quelle di cui ci ha parlato il professor Zalamea, possono pure parlare del continuo, ma lo fanno con discorsi (definizioni, concetti, deduzioni, dimostrazioni) che hanno una natura discreta. Ciò vale anche per la filosofia, che si esprime solo attraverso discorsi. La questione ricalca perfettamente quella del rapporto di vita e conoscenza, su cui si è lavorato a Mechrí durante il primo anno di attività; la vita ci si presenta in un *continuum*, ma la conoscenza che ne abbiamo la esprimiamo in discorsi, significati ben delimitati e che non sfumano l'uno nell'altro. Che poi la conoscenza nel suo formarsi ed anche l'attività di esprimerla con un discorso appartengano a loro volta al *continuum* della vita, non inficia il fatto che i significati espressi si ordinino in modo discreto. C'è un perenne rimbalzo dal continuo al discreto, un'oscillazione che non si può e forse non si deve tentare di arrestare (la stessa che si può ritrovare nel rapporto fra dionisiaco e apollineo: le belle e definite forme vengono disgregate dalla continua attività dionisiaca, ma il processo continuo e le nuove forme che ne scaturiscono possono essere descritte da un linguaggio ben ordinato, regolato, apollineo, e così via).

Un'altra – per me – fondamentale domanda si impone: che cos'è una logica? Anche qui lo stile del domandare vuole essere socratico: conosciamo diverse logiche, tutte esempi della *logica*, ma vorrei sapere se si può definire la logica in generale. Ancora: in che modo una determinata logica dipende dagli oggetti a cui si applica? Dati degli oggetti ed una logica adatta ad essi, è questa l'unica possibile? Per esempio, la logica intuizionista è l'unica adatta ai topoi o se ne possono creare altre?

3. Su logica classica e logica intuizionista

Credo che la logica classica venga usata anche dal logico intuizionista, non solo nella vita di tutti i giorni, ma anche nel suo lavoro di logico e di matematico. Supponiamo che gli si presenti un teorema la cui dimostrazione sia condotta secondo le regole della logica intuizionista e di cui debba verificare la validità. Nell'accingersi alla verifica sarà posto di fronte all'alternativa tra correttezza o non correttezza della deduzione: *tertium non datur*. Anche se poi, nel seguire i passaggi della deduzione si avvarrà esclusivamente della logica intuizionista, nel prendere l'avvio del suo lavoro e ad ogni passo di cui debba controllare la correttezzafarà riferimento alla logica classica (corretto o non corretto, non c'è altra possibilità). Si può dire che siamo sempre alle prese con una pluralità di logiche, ognuna adatta ad un ambito particolare, ma non esclusiva, ognuna impiegata in un universale solo relativo?

4. Universale relativo

Nel corso della sua esposizione il professor Zalamea ha fatto ricorso al concetto di universale relativo, contrapponendolo a quello di universale assoluto. Non sono sicuro di interpretare correttamente, ma mi sembra di poter dire che la relativizzazione di un universale voglia far intendere che, nella considerazione matematica condotta su di esso, non si ricorre ad altri elementi che ne stanno fuori (ben inteso: escluso il nostro discorso su questo universale), pur sapendo che esso non esaurisce la "totalità del mondo". Cioè isoliamo un oggetto (o una collezione di oggetti) e lavoriamo solo su di esso, ma sapendo che al di fuori c'è altro: in un certo senso ci vincoliamo a mantenerci in questo universale *prescindendo* da altro. Se questa mia interpretazione non è fuori luogo, mi sembra che si possa qui richiamare la *praecisio* di Peirce: l'oggetto che prendiamo in carico è tutto quanto ci interessa, ma sullo sfondo, dal quale lo abbiamo ritagliato, sta il mondo che abbiamo, più o meno, provvisoriamente tralasciato.

5. Alcune domande di matematica

Alcune domande mi si affollano alla mente; esse non sono necessariamente collegate fra loro, ma trovano spunto dalla suggestione che l'esposizione del professor Zalamea ha generato in me: a volte dipendono da semplici parole che in qualche modo, sollevando la nebbia che avvolge la memoria di alcune lontane conoscenze matematiche, mi propongono nuovi interrogativi.

La prima fa riferimento alle nominate funzioni olomorfe e meromorfe. La dimostrazione del teorema fondamentale dell'algebra condotta utilizzando il teorema detto di Liouville, molto più semplice di altre (ecco un esempio di come nuovi "quartieri" della matematica rendano più facile l'accesso a vecchi problemi), si sviluppa mostrando per assurdo come supponendo che la funzione $f(z)=1/P_n(z)$, dove $P_n(z)$ è un polinomio di grado n nell'indeterminata z, sia olomorfa conduca all'assurdo che f(z) debba essere costantemente nulla: la conseguenza è che f(z) non possa essere olomorfa e quindi $P_n(z)$ debba avere degli zeri. Si sa però che non esiste un metodo per il calcolo degli zeri di un polinomio qualsiasi di qualunque grado. Chiedo allora se dal punto di vista della logica intuizionista il teorema fondamentale dell'algebra possa essere accettato; credo che la risposta debba essere negativa: è così?

Mi piacerebbe sapere qualche cosa sul teorema del punto fisso di Lawere; se non vado errato, chiedo scusa per eventuali imprecisioni, afferma che, se esiste un'applicazione suriettiva da un insieme Y all'insieme delle applicazioni da Y in un insieme X, allora qualsiasi funzione f: X → X ha un punto fisso. Mi risulta difficile capire come possa esistere una simile applicazione suriettiva.

«Uno spazio topologico è coperto da vicinanze». Come tener conto delle vicinanze senza introdurre il concetto di misura e, quindi, facendo riferimento al numero? Provo a compiere un maldestro tentativo in questo senso: se attorno ad un punto traccio una linea chiusa che interpreto come "dominio di vicinanza", una trasformazione dallo spazio che contiene quel dominio e quel punto ad un altro che non spezzi la connessione del dominio, mantiene la vicinanza. Come esempio posso pensare alla trasformazione conforme sul piano complesso: questo tentativo è corretto?

Nei tre schemi grafici proposti alla fine di ognuna delle tre comunicazioni del professor Zalamea (cfr. Archivio on line, anno 2017-2018: Linguaggi in transito: Matematica) compare il rapporto tra derivazione (∂) e integrazione ($\int$), in cui la prima dovrebbe rinviare ad un approccio analitico e la seconda ad uno sintetico, oppure, si può dire, la derivazione dovrebbe stare dalla parte del prevalere della visione classica, mentre l'integrazione dovrebbe essere appannaggio della nuova visione matematica. Ma come è possibile giungere al calcolo integrale senza passare dal calcolo differenziale?

Cantor ha dimostrato che i punti di un quadrato possono essere messi in corrispondenza biunivoca con quelli di un suo lato; la cosa lo sorprese a tal punto che si dice abbia esclamato: «Lo vedo ma non ci credo». Ho come un'oscura sensazione che questa dimostrazione di Cantor possa avere una qualche relazione con il teorema del punto fisso di Brouwer; questo è solo un mio fantasma che mi ossessiona?

Infine una domanda che riguarda la capacità di intuizione dei matematici. Dopo alcuni secoli è stato dimostrato il grande teorema di Fermat: la dimostrazione, assai lunga e complessa, verosimilmente non è quella trovata dal magistrato e matematico francese. I casi sono due: o esiste una diversa (e più semplice) dimostrazione e allora il problema di trovarla resta ancora irrisolto; oppure Fermat ha avuto un abbaglio, la dimostrazione che afferma di aver trovato non è corretta; ma questo caso mi sembra ancora più interessante, perché allora avrebbe intuito in maniera davvero straordinaria una proposizione matematica pur non potendo provarla. Che cosa si può dire dell'intuizione matematica? Non è forse come la visione di un mondo possibile prima di aver trovato la strada per arrivarvi? E – di nuovo – non ha tutto ciò una somiglianza con l'arte?

(12 dicembre 2019)